JAPLA研究会資料 2008/9/27

整数論を「循環小数のふしぎ」からのぞく
フェルマーの定理と原始根

西川　利男

１．整数論と循環小数

整数論は学校数学では、いままでほとんど教えられて来なかったが、コンピュータ時代の暗号化技術を支える数学としていまや極めて重要である。

一般に整数論というと、まずは「ある数が割り切れるかどうか？」、「素数とは何か？」を入り口として始められるのが常である。しかしながら筆算よりも電卓でという世代にとって「割り切れるかどうか？」にはあまり関心がもたれないのではないか。

ふつう、電卓の割り算では余りを出す代わりに小数点以下まで割っていってしまう。整数の割り算が出来る電卓など見当たらない。「すべて同じ操作で一律に割り切ってしまえば、それで良い」という世相の反映だろうか。

一方、循環小数は

1/7 = 0.142857142
2/7 = 0.285714285
3/7 = 0.428571428

のように、電卓を打てば上のようにすぐ現れる。

先月、鈴木義一郎氏の論文[1]、「7の逆数を小数展開したときに現れる142857という数値の問題」は、今の世代の学生にとって「循環小数のふしぎ」として、かっこうの整数論の導入になると思う。

２．Ｊによる逆数の小数展開－循環小数

まずはＪにより小手調べをやってみよう。

```
   11j9 ": 1r7
0.142857143
   11j9 ": 2r7
0.285714286
   11j9 ": 3r7
0.428571429
```

鈴木氏の指摘されるように、「142857」の数字が繰り返される。

また、次のような例もある。

```
   11j9 ": 1r6
0.166666667
   11j9 ": 1r7
0.142857143
   11j9 ": 1r8
0.125000000
   11j9 ": 1r9
0.111111111
```

```
   11j9 ": 1r10
0.100000000
   11j9 ": 1r11
0.090909091
   11j9 ": 1r12
0.083333333
   11j9 ": 1r13
0.076923077
```

こんどは分母の値により、割り切れる場合と割り切れない場合とがある。割り切れず循環小数になるときもその循環する桁はさまざまである。

これらの「整数のふしぎ」を理解するために、ここで整数論が登場する。

３．フェルマーの定理と循環小数[2],[3]

逆数の小数展開で現れる「循環小数のふしぎ」を理解するには

「10, 100, 1000, … (10 のべき乗)を分母で割る」

という考え方が基本になる。

つまり、たとえば $10^{x}/7$, (x = 1, 2, 3, …)を考えることになる。

ここで、素数 p に対して、フェルマー(Fermat)の定理によれば

$$10^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

すなわち、素数 p で割って余りが 1 になるには、10 を $p-1$ 乗しなければならない。

これは $1/p$ の小数展開では循環小数の桁数は p 桁になることを示す。

しかしながら、p の値によってはそれ以前に余りが 1 になる場合もある。つまり素数 p の小数展開でも循環小数の桁がもっと少ない場合もある。

これらを J の簡単なコーディングにより調べてみよう。

まず、10 の 1 から p までのべき乗を p で割った余りを見てみる。

```
   7| 10x^>:i.7
3 2 6 4 5 1 3
   11| 10x^>:i.11
10 1 10 1 10 1 10 1 10 1 10
   13| 10x^>:i.13
10 9 12 3 4 1 10 9 12 3 4 1 10
   17| 10x^>:i.17
10 15 14 4 6 9 5 16 7 2 3 13 11 8 12 1 10
   19| 10x^>:i.19
10 5 12 6 3 11 15 17 18 9 14 7 13 16 8 4 2 1 10
   23| 10x^>:i.23
10 8 11 18 19 6 14 2 20 16 22 13 15 12 5 4 17 9 21 3 7 1 10
   29| 10x^>:i.29
10 13 14 24 8 22 17 25 18 6 2 20 26 28 19 16 15 5 21 7 12 4 11 23 27 9 3 1 10
```

つぎに余りが1に等しいべき乗の値、つまり循環小数の桁数はつぎのように得られる。

```
   >: 1 i.~3| 10x^>:i.3
1
   >: 1 i.~7| 10x^>:i.7
6
   >: 1 i.~11| 10x^>:i.11
2
   >: 1 i.~13| 10x^>:i.13
6
   >: 1 i.~17| 10x^>:i.17
16
   >: 1 i.~19| 10x^>:i.19
18
   >: 1 i.~23| 10x^>:i.23
22
   >: 1 i.~29| 10x^>:i.29
28
   >: 1 i.~31| 10x^>:i.31
15
   >: 1 i.~37| 10x^>:i.37
3
   >: 1 i.~41| 10x^>:i.41
5
   >: 1 i.~43| 10x^>:i.43
21
```

上の結果から、分母が7の循環小数の桁は6桁であり、さらに17, 19, 23, 29ではそれぞれ16, 18, 22, 28桁となる。ところが、分母が3, 11では循環桁は1, 2桁であり、かつ37, 41, 43ではそれぞれ3, 5, 21桁である。

ここで「10は法7, 17, 19, 23, 29に対する原始根である」とも呼ばれる。原始根は大きな整数の合同計算などで威力を発揮する整数論では重要なテーマである。

その後のようすは、次の関数を作って調べてみる。

```
   n_repf =: 3 : '>: 1 i.~y.| 10x^>:i.y.'

   |: ([, n_repf)"(0) 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
21 46 13 58 60 33 35  8 13 41 44 96
```

　循環小数を実際に表示するプログラムを次に作った。

```
NB. repeating decimal fraction
NB. new version using idiv
NB. 2008/7/28

idiv =: 3 : 0
:
(<. (x: x.) % x: y.), ((x: y.) | x: x.)
)

rep_fr =: 3 : 0
1 rep_fr y.
:
'Q R' =: (x.*10x ^ (y.-1)) idiv y.
N =. (y.-1) - (# ": Q)
'0.', (N#'0'), ": Q
)
```

その実行例は次のようになる。

```
   rep_fr 7
0.142857
   rep_fr 11
0.0909090909
   rep_fr 13
0.076923076923
   rep_fr 49
0.020408163265306122448979591836734693877551020408
   3 rep_fr 49
0.061224489795918367346938775510204081632653061224
   rep_fr 97
0.010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567
```

文献

[1] 鈴木義一郎「7の逆数を小数展開したときに現れる142857という数値の問題」
　　JAPLA研究会資料　2008/7/26
[2] A.Beiler, "Recreations in the Theory of Numbers", p.73-82, Dover(1966).
[3] 高木貞治「初等整数論講義（第2版）」p.57-61, 共立出版(1977).