JAPLA 研究会資料 2008/11/22

エジプト分数への和の展開

西川　利男

エジプト分数とは、正確には単位分数つまり分子が１の分数であるが、かつては小中学校の教科書に載っていて、たしか習った記憶がある。そしていまなお、インターネット・ホームページを賑わしているテーマである[1]。

一般の分数をエジプト分数の和へどう展開するかという問題は先月例会で鈴木義一郎氏によって話題にされた[2]。筆者も別のＪプログラムを作ってみた。

１．素朴なＪプログラム

これは与えられた分数を1/2, 1/3, ,,と順番に和をとり試していって見つけるという素朴なプログラムである。

```
NB. Egyptian Fraction Decomposition
NB. +/1r4 1r19 1r583 1r1019084
NB. 7r23

wr =: 1!:2&2
rd =: 1!:1

NB. Simple Greedy Method, 2008/10/26
greedy =: 3 : 0
P =. y.
S =. ''
M =. 2
while. M < 2000
  do.
NB.    wr P, M
    Q =. P - 1 % x: M
NB.    wr Q
NB.    rd 1
    if. Q > 0
       do. P =. Q
           S =. S, M
       else. P =. P
    end.
    if. Q = 0 do. break. end.
    M =. M + 1
  end.
(1%x:S), P
)
```

後で比較してみるが当然、実行には時間がかかる。

２．木田・牧野のアルゴリズムによるプログラム

木田，牧野の名著「UBASIC によるコンピュータ整数論」に、簡単だが非常に優れたアルゴリズムによる UBASIC のプログラムが記載されている。その考え方を筆者なりに解釈すると次のようになる。

たとえば 4/17 の場合を例にとれば

17÷4 = 4.27…なのでこれを越えない最も近い単位分数は 1/5 である。

そして、その差は　4/17 - 1/5 = 3/85 となるが、

これは J の分数計算機能で正確に分数値として求められる。

次には 3/85 に対して、上と同様に、

85÷3 = 28.33…なのでこれを越えない最も近い単位分数は 1/29 である。

これを次々に繰り返して行けば単位分数への展開がなされる。

以下はこれを元に、筆者が J で作ったプログラムである。

```
NB. Kida & Makino Method / programmed by T. Nishikawa 2008/10/27
NB. 木田祐司，牧野潔夫「UBASIC によるコンピュータ整数論」p.12，日本評論社
egyfrac =: 3 : 0
Q =. y.
S =. ''
while. Q ~: 0
  do.
    N =. >. 1 % Q
    S =. S, N
    Q =. Q - 1 x: 1 % N
end.
1 % x: S
)
```

３．２つのプログラムの実行と比較

```
   greedy 4r5
1r2 1r4 1r20
   egyfrac 4r5
1r2 1r4 1r20

   greedy 4r17
1r5 1r29 1r1233 1r3039345
   egyfrac 4r17
1r5 1r29 1r1233 1r3039345
```

このように、２つのプログラムでは実行時間に大変な差がある。

```
   6!:2 'greedy 4r17'
20.65
   6!:2 'egyfrac 4r17'
0.05
```

ときには、分母が思いがけない大きな数になる。

```
   egyfrac 7r23
1r4 1r19 1r583 1r1019084
   egyfrac 8r97
1r13 1r181 1r38041 1r1736503177 1r3769304102927363485
1r18943537893793408504192074528154430149
1r538286441900380211365817285104907086347439746130226973253778132494225813153
1r5795045870675428017131031918599186082510302919521954235835293576538994186863423603617986890532737493726150436618102283718985395838620114249939097896665
```

以下 3, 5, 7, 11, 13, 17 など素数を分母とし、1 から順次変えたものをそれぞれ分子とする分数の展開をまとめて示してみた。

```
   (], egyfrac)"(0) (x:3) %~ (>: i.2)
1r3 1r3   0
2r3 1r2 1r6
   (], egyfrac)"(0) (x:5) %~ (>: i.4)
1r5 1r5    0    0
2r5 1r3 1r15    0
3r5 1r2 1r10    0
4r5 1r2  1r4 1r20
   (], egyfrac)"(0) (x:7) %~ (>: i.6)
1r7 1r7    0     0
2r7 1r4 1r28     0
3r7 1r3 1r11 1r231
4r7 1r2 1r14     0
5r7 1r2  1r5  1r70
6r7 1r2  1r3  1r42
   (], egyfrac)"(0) (x:11) %~ (>: i.10)
 1r11 1r11    0    0      0
 2r11  1r6 1r66    0      0
 3r11  1r4 1r44    0      0
 4r11  1r3 1r33    0      0
 5r11  1r3  1r9 1r99      0
 6r11  1r2 1r22    0      0
 7r11  1r2  1r8 1r88      0
 8r11  1r2  1r5 1r37 1r4070
 9r11  1r2  1r4 1r15  1r660
10r11  1r2  1r3 1r14  1r231
   (], egyfrac)"(0) (x:13) %~ (>: i.12)
 1r13 1r13    0      0     0
 2r13  1r7 1r91      0     0
 3r13  1r5 1r33 1r2145     0
 4r13  1r4 1r18  1r468     0
 5r13  1r3 1r20  1r780     0
 6r13  1r3  1r8  1r312     0
```

```
 7r13  1r2 1r26      0      0
 8r13  1r2  1r9  1r234      0
 9r13  1r2  1r6   1r39      0
10r13  1r2  1r4   1r52      0
11r13  1r2  1r3   1r78      0
12r13  1r2  1r3   1r12 1r156
   (], egyfrac)"(0) (x:17) %~ (>: i.16)
 1r17 1r17      0      0          0       0
 2r17  1r9 1r153      0          0       0
 3r17  1r6 1r102      0          0       0
 4r17  1r5  1r29 1r1233 1r3039345       0
 5r17  1r4  1r23 1r1564          0       0
 6r17  1r3  1r51      0          0       0
 7r17  1r3  1r13  1r663          0       0
 8r17  1r3   1r8   1r82    1r16728       0
 9r17  1r2  1r34      0          0       0
10r17  1r2  1r12  1r204          0       0
11r17  1r2   1r7  1r238          0       0
12r17  1r2   1r5  1r170          0       0
13r17  1r2   1r4   1r68          0       0
14r17  1r2   1r4   1r14      1r476       0
15r17  1r2   1r3   1r21      1r714       0
16r17  1r2   1r3   1r10      1r128 1r32640
```

文献

[1] http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/mathematics/kirinui/kirinui53.html
数学切抜き帳、岩井齊良「古代エジプト分数」
[2] 鈴木義一郎「単位分数への分解」JAPLA 2008/10/25
[3] 木田祐司, 牧野潔夫「UBASICによるコンピュータ整数論」p.12, 日本評論社