

## エジプト分数への和の展開

西川 利男

エジプト分数とは、正確には単位分数つまり分子が1の分数であるが、かつては小中学校の教科書に載っていて、たしか習った記憶がある。そしていまなお、インターネット・ホームページを賑わしているテーマである[1]。

一般の分数をエジプト分数の和へどう展開するかという問題は先月例会で鈴木義一郎氏によって話題にされた[2]。筆者も別のJプログラムを作ってみた。

### 1. 素朴なJプログラム

これは与えられた分数を $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ , ... と順番に和をとり試していつか見つけるといふ素朴なプログラムである。

```
NB. Egyptian Fraction Decomposition
```

```
NB. +/1r4 1r19 1r583 1r1019084
```

```
NB. 7r23
```

```
wr =: 1! : 2&2
```

```
rd =: 1! : 1
```

```
NB. Simple Greedy Method, 2008/10/26
```

```
greedy =: 3 : 0
```

```
P =. y.
```

```
S =. ''
```

```
M =. 2
```

```
while. M < 2000
```

```
do.
```

```
NB. wr P, M
```

```
Q =. P - 1 % x: M
```

```
NB. wr Q
```

```
NB. rd 1
```

```
if. Q > 0
```

```
do. P =. Q
```

```
S =. S, M
```

```
else. P =. P
```

```
end.
```

```
if. Q = 0 do. break. end.
```

```
M =. M + 1
```

```
end.
```

```
(1%x:S), P
```

```
)
```

後で比較してみるが当然、実行には時間がかかる。

## 2. 木田・牧野のアルゴリズムによるプログラム

木田、牧野の名著「UBASICによるコンピュータ整数論」に、簡単だが非常に優れたアルゴリズムによるUBASICのプログラムが記載されている。その考え方を筆者なりに解釈すると次のようになる。

たとえば4/17の場合を例にとれば

$17 \div 4 = 4.27\cdots$ なのでこれを越えない最も近い単位分数は1/5である。

そして、その差は  $4/17 - 1/5 = 3/85$  となるが、

これはJの分数計算機能で正確に分数値として求められる。

次には3/85に対して、上と同様に、

$85 \div 3 = 28.33\cdots$ なのでこれを越えない最も近い単位分数は1/29である。

これを次々に繰り返して行けば単位分数への展開がなされる。

以下はこれを元に、筆者がJで作ったプログラムである。

NB. Kida & Makino Method / programmed by T. Nishikawa 2008/10/27

NB. 木田祐司, 牧野潔夫「UBASICによるコンピュータ整数論」p.12, 日本評論社

```
egyfrac =: 3 : 0
```

```
Q =. y.
```

```
S =. ''
```

```
while. Q > 0
```

```
do.
```

```
  N =. >. 1 % Q
```

```
  S =. S, N
```

```
  Q =. Q - 1 x: 1 % N
```

```
end.
```

```
1 % x: S
```

```
)
```

## 3. 2つのプログラムの実行と比較

```
greedy 4r5
1r2 1r4 1r20
egyfrac 4r5
1r2 1r4 1r20
```

```
greedy 4r17
1r5 1r29 1r1233 1r3039345
egyfrac 4r17
1r5 1r29 1r1233 1r3039345
```

このように、2つのプログラムでは実行時間に大変な差がある。

```
6!:2 'greedy 4r17'
20.65
6!:2 'egyfrac 4r17'
0.05
```

ときには、分母が思いがけない大きな数になる。

```
egyfrac 7r23
1r4 1r19 1r583 1r1019084
egyfrac 8r97
1r13 1r181 1r38041 1r1736503177 1r3769304102927363485
1r18943537893793408504192074528154430149
1r538286441900380211365817285104907086347439746130226973253778132494225813153
1r579504587067542801713103191859918608251030291952195423583529357653899418686
342360361798689053273749372615043661810228371898539583862011424993909789665
```

以下 3, 5, 7, 11, 13, 17 など素数を分母とし、1 から順次変えたものをそれぞれ分子とする分数の展開をまとめて示してみた。

```
([], egyfrac)"(0) (x:3) %~ (>: i.2)
1r3 1r3 0
2r3 1r2 1r6
([], egyfrac)"(0) (x:5) %~ (>: i.4)
1r5 1r5 0 0
2r5 1r3 1r15 0
3r5 1r2 1r10 0
4r5 1r2 1r4 1r20
([], egyfrac)"(0) (x:7) %~ (>: i.6)
1r7 1r7 0 0
2r7 1r4 1r28 0
3r7 1r3 1r11 1r231
4r7 1r2 1r14 0
5r7 1r2 1r5 1r70
6r7 1r2 1r3 1r42
([], egyfrac)"(0) (x:11) %~ (>: i.10)
1r11 1r11 0 0 0
2r11 1r6 1r66 0 0
3r11 1r4 1r44 0 0
4r11 1r3 1r33 0 0
5r11 1r3 1r9 1r99 0
6r11 1r2 1r22 0 0
7r11 1r2 1r8 1r88 0
8r11 1r2 1r5 1r37 1r4070
9r11 1r2 1r4 1r15 1r660
10r11 1r2 1r3 1r14 1r231
([], egyfrac)"(0) (x:13) %~ (>: i.12)
1r13 1r13 0 0 0
2r13 1r7 1r91 0 0
3r13 1r5 1r33 1r2145 0
4r13 1r4 1r18 1r468 0
5r13 1r3 1r20 1r780 0
6r13 1r3 1r8 1r312 0
```

```

7r13 1r2 1r26      0      0
8r13 1r2 1r9 1r234  0
9r13 1r2 1r6 1r39  0
10r13 1r2 1r4 1r52  0
11r13 1r2 1r3 1r78  0
12r13 1r2 1r3 1r12 1r156
  ([, egyfrac)"(0) (x:17) %~ (>: i.16)
1r17 1r17      0      0      0      0
2r17 1r9 1r153  0      0      0
3r17 1r6 1r102  0      0      0
4r17 1r5 1r29 1r1233 1r3039345  0
5r17 1r4 1r23 1r1564      0      0
6r17 1r3 1r51      0      0      0
7r17 1r3 1r13 1r663      0      0
8r17 1r3 1r8 1r82 1r16728  0
9r17 1r2 1r34      0      0      0
10r17 1r2 1r12 1r204      0      0
11r17 1r2 1r7 1r238      0      0
12r17 1r2 1r5 1r170      0      0
13r17 1r2 1r4 1r68      0      0
14r17 1r2 1r4 1r14 1r476  0
15r17 1r2 1r3 1r21 1r714  0
16r17 1r2 1r3 1r10 1r128 1r32640

```

文献

- [1] <http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/mathematics/kirinui/kirinui53.html>  
数学切抜き帳、岩井齊良「古代エジプト分数」
- [2] 鈴木義一郎「単位分数への分解」JAPLA 2008/10/25
- [3] 木田祐司, 牧野潔夫「UBASICによるコンピュータ整数論」p.12, 日本評論社