JAPLA 研究会資料 2008/1/16

Ｊによるディジタル幾何学―その５

Ｊ幾何グラフィックスーレムニスケート

西川　利男

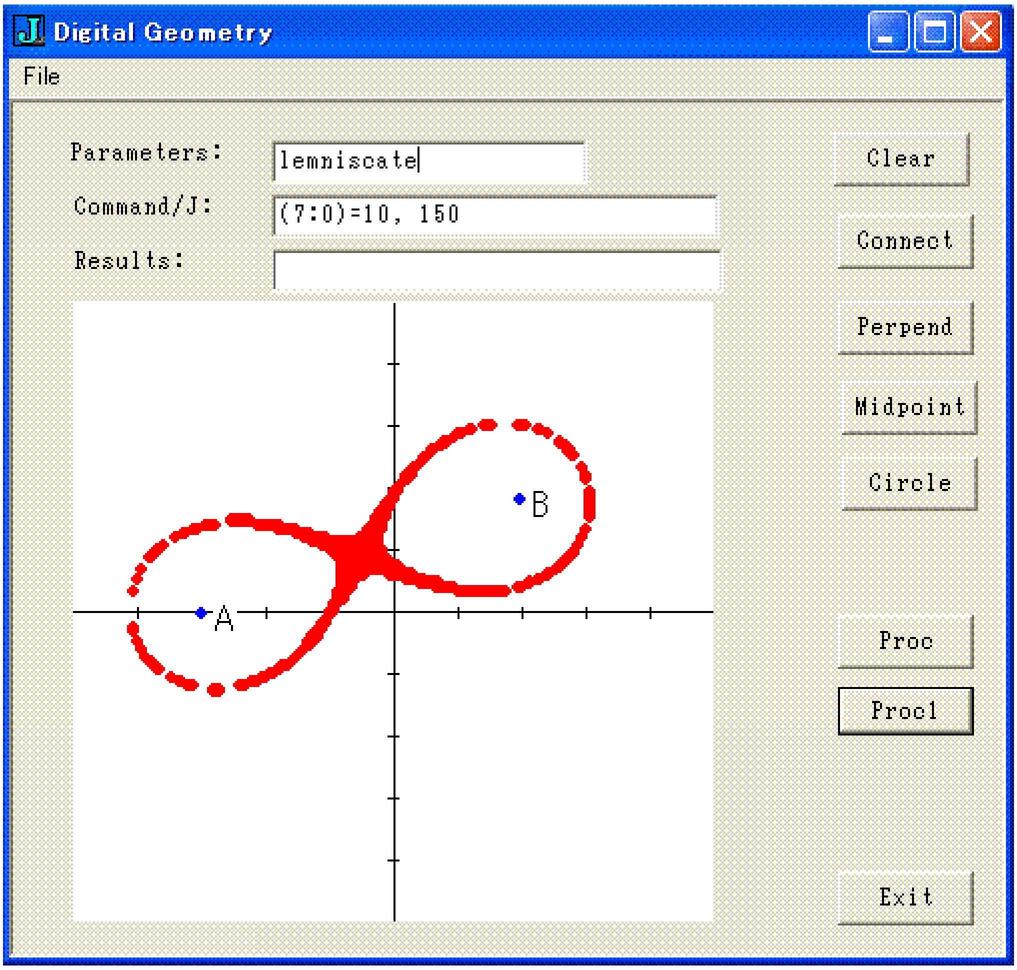
Ｊ幾何グラフィックスによる軌跡の問題として、今回はレムニスケート曲線を前回[1]に引き続きやってみる。

レムニスケート(Lemniscate)とは、２つの点ＡとＢとがあるとき、これとは別に１つの点Ｐをとり、それぞれ２つの点とを結ぶ線分 AB と BP とが次の条件

AP × BP ＝ (一定)

を充たすときに、点Ｐの軌跡として得られる曲線である。つまり、楕円は和が一定であるのに対して、積が一定であるので、変形した楕円と言ってもよいかもしれない。

したがって前回[1]の楕円のプログラムを一行、手直しするだけでレムニスケートは描かれる。実行した結果は以下のようになる。



プログラムは次のようになる。
前回にも説明したとおり、幾何グラフィックスの本体、クラスプログラムはそのままで、レムニスケートのための次の一連のプログラムをベースプログラムに追加した。

```
NB. Lemniscate / 2008/12/20 ===============================
lemniscate =: 3 : 0
A_A =: A_A__ins   NB. global point data
B_B =: B_B__ins   NB. ,,
'm n ran int eps' =: parse COMMAND__ins
P_P =: 0, 0
PP =: (int, ran) range P_P
AP =: lemni L:0 PP
(> eps > L:0 ,AP) # ,PP
)

lemni =: 3 : 0
| m - (dis A_A - y.) * (dis B_B - y.)
)
```

前述したように、レムニスケートの計算部分はサブプログラムの lemni だけである。
これを呼び出すプログラム lemniscate は楕円のものと同じである。
実行には、座標面の任意の位置に２つの点を定め、例えば
(7 :0)=10, 150
と入力する。ここでそれぞれの値は
(一定値 : つねに0)= 走査範囲, 区分数
である。
そしてボタン Proc1 を押すと曲線が描かれる。

ふつう良くある水平なメガネ状のレムニスケート曲線は Bernouli のレムニスケートであり、２つの点 A と B の距離を a とするとき、一定値が a^2 に等しい場合のものであって、その方程式は極座標で次のように表される[2]。

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

いろいろ実験すればわかるように、一定値の値によってレムニスケート曲線は１つの閉曲線になったり、２つの閉曲線になったりさまざまに変化する。
幾何学では、すぐ証明だけでこと足りるのではなく、図形をよく観察することが大切である。Ｊ幾何グラフィックスがそれに役立ってもらいたい。

[1] 西川利男「Ｊによるディジタル幾何学ーその４　Ｊ幾何グラフィックスによる楕円、双曲線、放物線などの軌跡」JAPLA シンポジウム資料 2007/12/8
[2] 高木貞治「解析概論」岩波書店、p.136 (1986)