

## 整数分割 PARTITION 計算 (第3報)

J言語の能力を問う!?

中野嘉弘 (札幌市南区・85才)

FAX 専 011-588-3354      yoshihiro@river.ocn.ne.jp

どうも、順列・組合や分割法など長大計算では、J言語の能力は、余り評価出来ないのではあるまいか? 重大な話なので、会友・諸賢の再三度のチェックが望まれる。

### 0. は し が き

この4月のJAPLA例会での鈴木義一郎先生の報告「4個のみかん：数の分割 (Partition)」(文献1) は衆目を集めた。志村氏の感激的メールが会友間を駆け巡った(文献1-a)。

それに対して、同じ4月、小生即ち中野の報告(文献2、第2報相当)は、図らずも、「演算結果は果たして正解か?」であった。

整数分割  $P(294)$ 、その正解は 6039763882095515、に於いてすでに西川、中野、志村のそれぞれのプログラムによる計算が、正解値と  $\pm 1$  だけの差があったのだ。

これは周知のラマジュアンの相合(Congruences)条件  $294 = 5m + 4$  より、その分割数は元来 5 で整除されるべきものなのだから、我らの答は文字通り「今一つ」なのだ。

これを、鈴木氏(文献1)のプログラムで計算すれば、なんと、正解値とは  $-7$  も違うのだ。中野は志村氏宛に「反応返信メール」を送った。(文献2-a)

と云うわけで、吟味が必要と思う。本稿は、その一つである。

### 1. 分割数の正解の判定法 や 対比

1) 相合式 (Congruences) の利用 : 分割数  $P(n)$  の引数  $n$  について

Srinivasa RAMANUJAN の条件 :

$p(5k + 4) \equiv 0 \pmod{5}$  :  $n$  の末尾が 4 or 9 の時、分割数の末尾は 0 or 5.

$p(7k + 5) \equiv 0 \pmod{7}$

$p(11k + 6) \equiv 0 \pmod{11}$

A.O.L. Atkin (Univ. of Illinois) の条件 :

$p(17303k + 237) \equiv 0 \pmod{13}$

このイリノイ大のグループによれば、さらに、追加があるらしい!

我らの計算値は、先ず、こうした条件をクリアすべきである。もしくは、定評ある下記の数学ソフト等での演算結果と比較すべきであろう。

2) カナダ産の数学ソフト Maple V :

西川はこれを探る。

with (combinat); で numbp(294); の結果は、上記 0. はしがき に述べた正解を与える。ただし、対象の数が大きいと、演算で STACK OVERFLOW エラーを発生する難がある。対策としては、numbp(n) の引数 n を、小さな数 50 程度から出発して 50 刻み程度で数を増加するなどの工夫をすれば、この種の STACK OVERFLOW エラーは突破出来る。中野は前報 (文献 2) では n = 1550、分割数 50 桁 を報じたが、今回、鈴木報告に刺激されて、一応 n = 3601、分割数 63 桁まで調べた。

### 3) 有名な数学ソフト Mathematica :

色々な条件付きの分割数を計算出来る。

Partition (長さ 2 とか 3 のオフセット付きの分割数)

- PartitionP (無制限分割数=我々が普通に云う分割数に相当する)

PartitionQ (特異分割数)

これは、STACK OVERFLOW エラーが無いので使い易い。

### 4) 分割数の一覧表 も出来ている。

例えば、インターネットの検索機能を利用すれば、日本国内外の研究レベルが痛切に判る。 <http://www.asahi-net.or.jp/> Hisanori Mishima

分割数の桁数や、また分割数が素数か、またはその値の素因数分解まで併記すると云う親切さ!

例えば、 $P(302) = 10657331232548839$  (17 桁) = prime 素数

直上の 3 ケの方法は、あたかも三角関数表を見る類であるので、思考の面白みは少ない。そこで、色々な工夫の面白みが欲しくなる。

例えば、「漸化式」法ならば、跳び跳びの任意の整数値での「分解数」の計算は出来ないが、低次の各ステップが正しくなければ、高次の計算は正しく無い筈だから、一段づつチェックしながら、先々へと計算を進める作業をすれば、チェック機能付きの演算を行う事も出来よう。

中野の前報 (文献 2) は、その流儀を行ったものである。

その際、中野は終始、J 言語に頼ったので、P(n) の n = 294 辺りで行きづまった。

先の 0. はしがき に述べた通りである。

老友・山下は時に「手計算」なる便法を用いて、結構、良い結果を出しているようだ (文献 3)。正解が予め与えられて居る時、その確認納得用には役立つと思われる。ある種のハイブリッド法と云えるか?

## 2. J 言語の限界は?

### 1) 山下の手計算の FAX 値 (文献 3、4) との微妙な差異

- p289=. 4219 388528 587095 (16 桁) (山下) 正解と同じ

timer 'wr x: part\_no 289' (鈴木流、中野マシンで)  
4219388528587094 末尾で -1 の差  
0.171 sec 所要時間 (秒)

timer 'wr x: PN 290' (中野)  
4219388528587095 山下と同じ  
0.024 sec

- p292=. 5234 371069 753672 (16 桁) (山下) 正解と同じ

timer 'wr x: part\_no 292 ' (鈴木流、 中野マシンで)  
5234371069753670 末尾で - 2 の差  
0.142 sec

timer 'wr x: PN 292' (中野)  
5234371069753672 山下と同じ  
0.026 sec

- p294=. 6039 763882 095515 (1 6 桁) (山下) 正解と同じ

timer 'wr x: part\_no 294 ' (鈴木流、 中野マシンで)  
6039763882095508 末尾で - 7 の差  
0.142 sec

timer 'wr x: PN 294' (中野)  
6039763882095516 末尾で + 1 の差  
0.028 sec

2) 代入値が正しく復元出来ない。 これは致命的！ 例を示す。

正解値 cp302 =. 10657331232548839 代入して、出力すると  
x: cp302 -> 10657331232548838 末尾が - 1 だけ異なる。

同様なテストでの奇妙な結果

6 2 \$ x: cp302 + 0.1\*(i.12) の結果は  
5 行目まで 10657331232548838、 6 行目で突然 10657331232548840 になり、  
代入正解値 10657331232548839 は、ついに顔を出さない！  
この計算で cp302 の処に、直接 10657331232548839 や 10657331232548838  
なる数値を代入して計算しても同じ結果である。 何故だ？！

3) 素因数分解での疑問：

上の正解値 10657331232548839 は元来、素数 prime である。 実際それは、有名な他のソフト MATHEMATICA を用い、PrimeQ テストの結果でも 真 (True) である。

素因数分解をJ言語でトライすると、

q: cp302 -> 2 3 53 239 4691 29892209  
q: cp302 + 0.9 -> 2 3 53 239 4691 29892209  
q: cp302 + 1 -> 2 2 2 5 7 3229 11787518507 そして  
x: cp302 + 1 -> 10657331232548840 末尾は当初値とは + 2 違う！

つまり J言語は、中間値 10657331232548839 を扱う事は出来ない！？  
即ち、整数分割問題で、J言語は P(302) は処理出来ない例なのだ！ と云えそうだ。  
その前で、分解数が素数になる例 P(216) では、こんな奇妙な事は起きない。

対象の数が長大化して、Partition P(n) で n ~ 3 0 0 辺りから、怪しくなる。

依って、中野の漸化法では、その辺 までしか扱わぬ。

4) 長大数について、J言語では、末尾の数の  $\pm 2$  位は、どうでも良いらしい!?

### 3. 鈴木流の Partition プログラム の 限界

志村メール (文献 1-a) に励まされて、長大例でトライしてみた。

1) `timer 'wr x: part_no 2000'` 桁数が判るように 6 桁ずつ分けて表示  
424209 073619 689142 494994 888632 368624 339376 930816 0 (4 9 桁)  
3.97 sec (中野マシンで)  
正解 (Maple V) は下記の通りで、桁数で 3 桁も違う!  
472081 917561 941388 860143 240679 995951 220034 4166 (4 6 桁)  
尚、この正解値 は Mathematica のものと一致している。

2) `timer 'wr x: part_no 3601'`  
858894.....057600 (7 6 桁)  
12.4 sec (中野マシンで)。  
正解 (Maple V) は下記の通り、1 3 桁も答が違う!  
281542 734464 642231 753217 113165 779854 143682 232111 758509 045335 \  
680 (6 3 桁) Mathematica でも同じ!

長大計算で、結果の桁数まで違うのは、残念である。これは、J言語の限度とは別種のミスに起因する問題かも知れぬ?

3) 山下の手計算 FAX (文献 3) によれば、比較の結果、鈴木流は  $n = 289$ 、 $291$  以上では、疑問的らしい。(  $n = 290$  の場合には一致したが)

### む す び

整数分割問題のおかげで、楽しませて頂いた。副産物として、長大計算に於いては、J言語の限界が見えて来た。また、プログラミングの難しさも具体化して来た。比較に利用した数学ソフト Maple V や Mathematica の優秀さには驚かざるを得ない。また、日本内外の同好の研究者にも、多大の敬意を表する。我ら、JAPLA の会友もガンバロー!

### 文 献

- 1) 鈴木義一郎「4 個のみかん：数の分割 (Partition)」 JAPLA 2008/Apr/26  
- a) 志村メール JAPLA discussion <JAPLA@aplsoft.co.jp> May 02,2008 9:36 AM  
「鈴木先生の力作 Partition を試してみてください。とても速く、2000 ぐらいでも平気でこなします。」
- 2) 中野嘉弘「整数分割 PARTITION 計算の話題 (第 2 報相当) 演算結果は果たして正解か?」 JAPLA 2008/Apr/26 pp. 8  
- a) 中野リプライ・メール: 宛先 <JAPLA@aplsoft.co.jp> 2008 May 5 9:59  
Re: (中野) SHIM JAPLA Apr '08 「確かに高速、wunderbar! しかし、結果は P (294 以上) では怪しい! 奮闘を祈る!」
- 3) 山下 FAX (2008-5-15) 鈴木先生流の分割数計算値 P(285-314) について。  
p(350),p(400) については、手計算を予定するも未完である。

4) 山下FAX (2008-5-17) 「『数の分割』手計算の弁」 JAPLA 5月例会用草稿