

超長大整数の分割計算

(第4報) 70,000 までの PARTION

中野嘉弘 (札幌市南区・85才)

FAX 専 011-588-3354 yoshihiro@river.ocn.ne.jp

PARTION の計算、100 や 200 の分割はさて置いて、今回は、万台 それも 7万 70000 迄を話題にする。 JAPLA 会友の応援を請う。

0. は し が き

先の5月の JAPLA 例会で、鈴木義一郎氏は 「数の分割(Partition) : FINAL VIRSION (註: ママ)」(文献1)を提供された。前の4月例会にも「同名の報告」(文献1-a)があり、これに対して当時、世話役・志村氏から感激的メールが会友間を駆け巡った(文献1-b)。「最終 VERSION」の先廻り PR だったのか?

"PARTITION" に対しては、既に、先の4月、中野の報告(第2報相当、文献2)は 凶らずも、「演算結果は果たして正解か?」であった。

要旨は「J言語の能力は、上例の $n=300$ (詳しくは 294) 辺りから、怪しくなるぞ 注意せよ、要チェック!」である。

その反応のつもりか? 5月の鈴木氏「最終版」の末尾 p.8、最後の行は「中野氏らの結果は正しくない!」と結ばれていたのにはビックリ、参ったな? そもそも、5月号の中野報告(文献3)の趣旨は「J言語の能力を問う。盲信出来ぬ、会友・諸賢の再三度のチェックを望む。」であり、「中野らの計算結果が正しい!と云ったつもりは無い」のだが、残念にも、鈴木氏の final report やらとはすれ違いであったらしい?

5月の研究会の直後(5月30日)、西川会長から FAX が到来した。(文献4) 「整数の分割の問題: 誰かれの結果の数字が一致したの違ったのという論争から一歩置いて、<数学の問題>か<コンピュータの問題か>をはっきりさせて、解決させたらいかがですか。」と。

要旨は

◎数学の問題=サイエンスの問題か?

- ・ ラマヌジャンの条件: 相合式はどこまであるのかな? 出典も知りたい。
- ・ 漸化式の適用範囲は?

◎コンピュータの問題=エンジニアリングの問題か?

- ・ Jの多桁整数計算(x: と ...x)に限界があるのか? (文献5)
- ・ 山下先生の<手計算>を、<手ではなくコンピュータで行っては・・・如何で
でしょうか?>

「PARTION 問題が、ここ数ヶ月 JAPLA のほとんどの人の頭をひねらせ、ボケ予防に一役買ったという功績は大いにあるでしょう。」

なるほど! そこで本稿は、一挙に、与数が 1万 10001 以上 7万 70000 台

までの PARTITION について「J 言語の能力」を論じよう。

これらは、与数に対する正解が与えられていない領域に該当する。
西川会長に御満足頂けそうな答は、早急には無理だが、その先駆けにはなれよう。
(与数値が小さくて、高々 数千 レベルの場合は、今は論じない。)

1. PARTITION で 既知 の 話

既に先人の結果が存在ならば、自己の計算結果は先ず、それと対照したいものだ。

1) Maple V や Mathematica での計算や Web Site で公表の数表があります。

- カナダ産の数学ソフト Maple V : 西川はこれを探る。
STACK OVER ERROR 対策の工夫も要るが、中野は前報(文献2)では
 $n = 1550$ 、分割数 50 桁 を報じたが、(文献3) その後も一応、
 $n = 3601$ 、分割数 63 桁 まで調べた。
- 有名な数学ソフト Mathematica :
これは、STACK OVERFLOW エラーが無いので使い易い。
色々な条件付きの分割数を計算出来る。
Partition (長さ 2 とか 3 のオフセット付きの分割数)
※PartitionP (無制限分割数=我々が普通に云う分割数に相当する)
PartitionQ (特異分割数)
"Mathematica" の限界については、後節で述べる。

2) コンピュータの結果は、数学と対照して、納得させたい!
相合式 (Congruences) の利用の事だ。 山下氏曰く:「ラマヌジャンの条件等
によるチェックを採用したい。」

- Srinivasa RAMANUJAN の条件: 分割数 $P(n)$ の引数 n について

$p(5k + 4) \equiv 0 \pmod{5}$: n の末尾が 4 or 9 の時、分割数の末尾は 0 か 5。

$p(7k + 5) \equiv 0 \pmod{7}$

$p(11k + 6) \equiv 0 \pmod{11}$

- A.O.L. Atkin (Univ. of Illinois) の条件:

$p(17303k + 237) \equiv 0 \pmod{13}$

我らの計算値は、先ず、こうした条件をクリアすべきである。

3) 分割数の一覧表があるよ!

$n = 10000$ 1万 までなら公刊されている。

例えば、インターネットの検索機能を利用すれば、日本国内外の研究レベルが痛切に判る。 <http://www.asahi-net.or.jp/> Hisanori Mishima

分割数の桁数や、また分割数が素数か、またはその値の素因数分解まで併記すると云う親切さ!

例えば、 $P(302) = 10657331232548839$ (17 桁) = prime 素数

以上 3ケ の対比法は、三角関数表を見る類であるので、思考の面白みは無い。
そこで、色々な工夫の面白みが欲しくなる。

例えば、「漸化式」法ならば、跳び跳びの任意の整数値での「分解数」の計算は出来ないが、低次の各ステップが正しくなければ、高次の計算は正しく無い筈だから、一段づつチェックしながら、先々へと計算を進める作業となるので、チェック機能付き

の演算法と見なす事も出来よう。

中野の前報（文献2）は、その流儀を行ったものである。
その際、中野は終始、J言語に頼ったので、 $P(n)$ の $n = 294$ 辺りで行きづまった。
先の 0. はしがき に述べた通りである。

老友・山下は時に「手計算」なる便法を用いて、結構、良い結果を出しているようだ（文献6）。正解が予め与えられて居て、その確認納得用には役立つと思われる。
ある種のハイブリッド法と云えるか？

2. 中野 の 長大計算

中野マシン： SHARP Note Mebius PC-AL70F （西川会長マシンとほぼ同じ）
定格 Win XP Home Ed.、 CPU： AMD Athlon XP-M 2000+、 1.73 GHz
メモリー： 256MB x 3 = 768 MB、 HDD 60 GB

正解判定法： 最新の アトキン A.O.L. Atkin (Univ. of Illinois) の相合式
 $p(17303k + 237) = 0 \pmod{13}$ 等を利用。

演算は $237 + 17303 * i.6 \rightarrow 237\ 17540\ 34843\ 52146\ 69449\ 86754$ を
対象にする。（最初の与数 237 の場合は省く。例 34834 は比較の為に追加。）

与数データと計算例： 計算関数 part_yn

0) 予備テスト： 与数 9999 と 10000 （計算値公開済み、上述）

- timer 'wr pyn9999 =. part_yn 9999 ' 結果 107 桁
3570990187.....2313000
インターネットでの公開値 (by Hisanori Mishima) と一致。
ラマヌジャンの相合式条件にも合格（与数の末尾が 4 または 9 ならば、分割数は 5 の倍数）。

計算時間 451.503 sec (7 min 31.503 sec)

- tc 'wr pyn10000 =. part_yn 10000 ' 結果 107 桁
3616725132.....6435144
インターネットでの公開値 (by Hisanori Mishima) と一致。
計算時間 449.151 sec (7 min 29.151 sec)

1) 与数 10004 と 10009 、 計算関数 part_yn

- tc 'wr pyn10004 =. part_yn 10004 ' 結果 107 桁 (5 0 桁 2 行強)
3805573826 8810440016 7816630127 0425729152 1005104676 /
9213404936 7300380021 0434694356 1973102795 1850271915 /
1565055
ラマヌジャンの相合式条件に合格 (5 で整所除される)

- tc 'wr pyn10009 =. part_yn 10009 ' 結果 107 桁 (5 0 桁 2 行強)
4055503643 6204607134 8592796916 0911874026 6215275396 /
7257268163 9954514161 4644574041 8923396259 3348829140 /

0525675

ラマヌジャンの相合式条件に合格 (5 で整除される)
計算時間 464.23 sec (7 min 44.23 sec)

2) 与数 17540、計算関数 part_yn、結果は1 4 3桁 (5 0桁 3行弱)

```
tc ' wr pyn17540 =. part_yn 17540 '  
2829507495 2059863203 6171379735 2501835323 6320610965 /  
2569543941 7913363576 5720847080 0127413480 2787457327 /  
4272468136 2203029267 9182821520 3584155837 445
```

": pyn17540 -> 143
24 60 60 #: 1448.19 -> 0 24 8.19 (24 min 8.19 sec)

Atkin の相合式 (mod 13) によるチェックは
13 | pyn17540 -> 0 OK!
13 | (pyn17540 + 1) -> 1
13 | (pyn17540 - 1) -> 12

3) 比較の為: 与数 34834、結果は2 0 3桁 (5 0桁 4行強)

```
tc ' wr pyn34834 =. part_yn 34834 '  
  
3415492065 4484445198 4323023285 3737410974 2277586972 /  
0974342922 9769921434 8721736821 5986461104 9495298915 /  
5958907493 4252689540 6731273285 3532212271 8614105066 /  
5243498941 4946390884 2894151842 6080140095 0650943205 /  
045
```

ラマヌジャンの相合式条件に合格 (与数の末尾 4、分割数は5の倍数)
※ Atkin 相合式条件は、(比較例につき当然ながら) 満足していない!

時間 24 60 60 #: 5938.26 -> 1(h) 38 (m) 58.26 (s)

3 a) 与数 34843 (本来のもの)、結果は2 0 3桁 (5 0桁 4行強)

```
tc ' wr pyn34843 =. part_yn 34843 '  
3632445248 5228972827 0314092901 2297242921 1355234247 /  
8312883087 8757399026 7435186592 8668156631 1348077721 /  
4780479015 4822910491 9581270851 7790712681 1965716609 /  
9453252757 1521303844 7863325157 1655681261 6273757245 /  
180
```

Atkin 相合式チェック
13 | > pn34843 -> 0 OK!
13 | 1 + > pn34843 -> 1
13 | 12 + > pn34843 -> 12
13 | 13 + > pn34843 -> 0

RAMANUJAN の相合式条件をも幾つか満たす。
5 | > pn34843 -> 0 OK!
11 | > pn34843 -> 0 OK!

時間 24 60 60 #: 6096.53 -> 1(h) 41 (m) 36.53 (s)

- 4) 与数 52146、計算関数 part_yn、結果は 2 4 9 桁 (5 0 桁 5 行弱)

```
tc ' wr pyn52146 =. part_yn 52146 '
```

```
6772368558 0266918777 8311601324 9699220221 9085899878 /
8075269310 5846370426 0887183612 2288562994 2544155903 /
0323240094 2991230623 2190471251 8236571035 9598083236 /
7642328732 5097660408 0076893097 8990814808 9464076920 /
8636828514 7444558807 6635650029 7555172085 99180368
```

Atkin の相合式 (mod 13) チェック

```
13 |> pn52146 -> 0 OK !
13 |> 1 + pn52146 -> 1
13 |> 12 + pn52146 -> 12
13 |> 13 + pn52146 -> 0
```

時間 24 60 60 #: 13751.7 -> 3(h) 49 (m) 11.7 (s)

- 5) 与数 69449、計算関数 part_yn、結果は 2 8 8 桁 (9 6 桁 3 行)

```
timer ' wr pyn69449 =. part_yn 69449 ' NB. am. 9:47
7828188618194146069.....18745529318
937347344460.....75863149964
206793445257.....54065651375
25207.1 NB. in sec, NB. 7 hours + 7.1 secc
```

#": pyn69449

288 NB. 96 * 3 桁数は: 上記の数値 3 行 x 9 6 桁

Atkin の 相合式 (mod 13) によるチェック

```
13 | pyn69449 -> 0 OK !
13 | (pyn69449 + 1) -> 1
13 | (pyn69449 - 1) -> 12
```

ラマヌジャンの相合式条件にも合格 (5 で整除される)

- 6) 与数 86754、計算関数 part_yn、結果は out of memory で、7 時間後中断。
「システムの仮想メモリが不足した。out of memory wdhandler_0_」
CTRL + ALT + DEL で タスク強制終了とした。

3. 中野 の 長大計算結果の グラフ表示

当 6月分の結果を、幾つかの グラフ で示そう。

グラフ1： 横軸は分解の対象の正の整数 70000迄 (10000 刻み)
縦軸は PARTITION 個数の数値をと云いたいが、それは大変な数値なので、取り
あえず、その数値の桁数 (10ならば42 通り、20なら627)を採る。
最高は、与数 69449 (約 7万)で 288桁 (絶対値では 10^{288} 程度)。
これは、求められた PARTITION Number の対数表示に近いものと理解出来よう。

グラフ2： 縦軸は 演算時間 (sec、 かなり高速の中野マシンによる)。
例えば 与数 10では瞬時の 0.004 sec、100でも 0.053 sec、
最大は 与数 69449 (約 7万)で 25207 sec (約 7時間)。

4. ライバル MATHEMATICA の 限界

PARTITION の問題では、STACK OVERFLOW エラー対策の都合で、数学ソフト MATHEMATICA が MAPLE V に優る。では、MATHEMATICA は、数万台の長大与数では如何であろうか？ MATHEMATICA 2.2 版でトライした結果を述べておく。

PartitionsP[9999] で、重大エラー「一般保護違反」が発生し、終了せざるを得なくなった。そこで、小さな与数から再出発すると

PartitionsP[4999] 正しい結果が 34 分が出た。

PartitionsP[5001] 正しい結果が、僅々 3 分が出た。

PartitionsP[5999] 正しい結果が、僅々 7 分が出た。

PartitionsP[6999] 正しい結果が、12 分が出た。

PartitionsP[7999] 正しい結果が、11 分が出た。

PartitionsP[8999]//Timing で、正しい結果が、なんと 0.sec が出た。

PartitionsP[9999]//Timing で、正しい結果が今度は 623 sec が出た。

PartitionsP[10001]//Timing で、正しい結果がなんと 2. sec が出た。

処理時間にバラツキがあるのは、我が J 言語 の メモリー関数 M. の効果云々の場合に似ているように思われる。

しかし、それ以上では、再び「一般保護違反エラー」や、エラー「必要なファイルハンドルが不足のため、MS-DOS の初期化が出来ません」などが発生し、不可能！！

西川会長の御心配の如く、「コンピュータの問題」が、先ず、大きくのし掛って来る。我が J 言語 で、与数 7 万 程度まで、正しく処理出来た（一応、チェック OK！）のは、喜ばしい。

む す び

整数分割問題のおかげで、ボケ防止をかねて楽しませて頂いた。長大な与数での計算に於いては、J 言語が有名な数学ソフト Maple や Mathematica に充分、競争出来た。この先の議論に望みが持てそうだ。中野の Partition 関数 "part_yn" 話は、その際に。

この後は、西川会長の申される「数学の議論に集中して」、我ら JAPLA の会友の皆様大いに、ガンバロー！

文 献

- 1) 鈴木義一郎「数の分割(Partition) : FINAL VIRSION 」 JAPLA 2008/05/24
pp.8
 - a) 鈴木義一郎「4個のみかん：数の分割(Partition)」 JAPLA 2008/Apr/26
 - b) 志村メール JAPLA discussion <JAPLA@aplsoft.co.jp> May 02,2008 9:36 AM
「鈴木先生の力作 Partition を試してみてください。とても速く、2000
ぐらいでも平気でこなします。」
- 2) 中野嘉弘「整数分割 PARTITION 計算の話題 (第2報相当) 演算結果は果たして
正解か？」 JAPLA 2008/Apr/26 pp. 8
 - a) 中野レプライ・メール：宛先 <JAPLA@aplsoft.co.jp> 2008.5.5 9:59
Re: (中野) SHIM JAPLA Apr '08 「確かに高速、wunderbar! しかし、結果は
P (294 以上) では怪しい! 奮闘を祈る！」
- 3) 中野嘉弘「整数分割 PARTITION 計算 (第3報)」再三度のチェックを望む。
- 4) 西川 F A X ('08 5. 30. 7:19 PM) 問題は、数学かコンピュータか?
- 5) 西川 F A X ('08 5. 20. 6:22 PM) 五月分、資料の確認計算。 x と q:
 - a) 中野 F A X (同日、7:00 PM) J 6 0 2 版でチェック、データ型の化け
 - b) 西川 F A X ('08 5. 21 9:09 AM) データ型表示 3!:0
- 6) 山下 F A X (2008-5-15) 鈴木先生流の分割数計算値 P(285-314) について。
p(350),p(400) については、手計算を予定するも未完。
 - a) 山下 F A X (2008-5-16) : 整数分割での鈴木先生の計算、p(285)~p(314) まで
 - b) 山下 F A X (2008-5-17) 「『数の分割』手計算の弁」 JAPLA 5 月例会用草稿