（続）　超長大整数の分割計算

（第６報）　１４万台　１４０、００５　まで　の　**PARTITION**

中野嘉弘　（札幌市南区・８５才）

PARTITION HUGE NUMBERS (sequel)

(Ser. 6)　Upto　140,005

NAKANO Yoshihiro (JAPLA, Sapporo)

FAX　011-588-3354　　　E-mail yoshihiro@river.ocn.ne.jp

Sony PC (Win XP) and J nicely completed calculations for PARTITION Huge Numbers upto hundred thousands or as large as 140,005.

PARTITION の計算 、**1000** や **2000** の分割はさて置き、前回は　７万　までやったが、今回は **Sony** の新鋭パソコン を動員して、１４万　迄の **PARTITION** を完遂した。
さらに、ＪＡＰＬＡ会友諸賢の応援を請う。

０．　は　し　が　き

６月の前報　「整数分割第４報（７万台）」（文献１）を大きく超えた報告である。

"PARTITION" に対する先の４月の中野の報告（第２報相当、文献２）は、図らずも「演算結果は果たして正解か？」であった。
要旨は「Ｊ言語の能力は、上例の **n＝300**（詳しくは **294**）辺りから、怪しくなるぞ注意せよ、要チェック！」である。
さらに、５月号の中野報告「第３報」（文献３）も「Ｊ言語の能力を問う。　盲信出来ぬ！　会友・諸賢の再三度のチェックを望む。」と繰り返した。
とにかく　**n 〜 300**（特に **＝289, 294, 301**）以上では、計算結果は怪しい可能性がある。
５月の研究会の直後（５月３０日）、西川会長から **FAX** が到来した。
「整数の分割の問題：　誰かれの結果の数字が一致したの違ったのという論争から一歩置いて、＜数学の問題＞か＜コンピュータの問題か＞をはっきりさせて、解決させたらいかがですか。」と。　　要旨は
◎数学の問題＝サイエンスの問題か？
・　ラマヌジャンの条件：　相合式はどこまであるのかな？　出典も知りたい。
・　漸化式の適用範囲は？
◎コンピュータの問題＝エンジニアリングの問題か？
・Ｊの多桁整数計算（**x:** と　**...x**）に限界があるのか？
・山下先生の＜手計算＞を、＜手ではなくコンピュータで行っては如何が？＞
「 **PARTION** 問題が、ここ数ケ月　ＪＡＰＬＡのほとんどの人の頭をひねらせ、ボケ防止に一役買ったという功績は大いにあるでしょう。」

なるほど！　そこで先ず、一挙に、与数が　１万 **10001** 以上　７万 **70000**　台までの **PARTITION** について「Ｊ言語の能力」を論じたのが、前の第４報（文献１）だった。西川会長に御満足頂けたか別として、その先駆けにはなれたであろうか？

これらは、与数に対する正解が他に与えられていない未知領域に該当した。
なんと、その後、あの有名な数学ソフト **Maple** が、既に １万台の　**PARTITION** の計算で、続々、誤答しているとの報告が、インターネットのウェブ上で見られれた。
その情報は、７月分の別な中野報告「 **PARTITION** 計算　 世界の動向　（第５報）
Maple でも　誤答」（文献　５）に述べて置いた。
本稿では、計算機自体を更新し、６月よりもさらに超長大計算をした続報をする。

１．　中野　　新マシン　**Sony** にアップ

前報（文献４）までの **PARTITION** の 限界は、その ２．節「中野の長大計算」の最後の項に、口惜しくも述べてあるが

６）　与数 **86754**、 計算関数　**part_yn** 、　結果は **out of memory** で、７時間後中断。
「システムの仮想メモリが不足した。 **out of memory wdhandler_0_"** 」
CTRL + ALT + DEL で　タスク強制終了とした。」

である。　与数　７万の直前であったが、この限界は、使用マシン　**SHARP Note Mebius PC-AL70F** （西川会長マシンとほぼ同格だが）によるものであった。
これを突破する為に、中野はマシン自体を、大枚をはたいて更新した。

新マシンは　**Sony VAIO** カスタマー **Style**
VGN-BX6AAPS (Win XP Pro　正規版 **SP2)**
15.4 型ワイド**WXGA**
CPU　Core 2 Duo T7100(1.80 GHz)/BX （註：高速 **2.0 GHz** 以上は販売終了）
Memory 4 GB (2GB x 2)　　　　（註：搭載可能な最大メモリー容量）
HDD　160GB　　　　　（註：それ以下のものは販売終了）

旧マシンとの相違は、**Memory** が　５倍と云うだけ！ （**CPU** の速度は殆ど同じ。　ただし新 **Core 2 Duo** は、旧 **Celeron** や　**Athlon** より段違いに有利だとの説明があり、最近盛んにＰＲされている。）　しかし、この 「５倍」 は　断然有効だった！

■　　テストラン：　与数　８６７５４

tc ' wr pn86756 =. part_yn 86754 '　NB. 2008. 6. 27 pm. 0.23
2192268066 ....
5397851162 ....
7496295776 ....
4685872269 ....
15652.7

24 60 60 #: 15652.7
4 20 52.7　　　　**NB.** 計算所要時間は　４　時間　２１分

#: ": pn86754
323　　　　　　　**NB.** 結果の数値は　３２３桁

相合条件チェック

13 | > pn86754 -> 7 NB. Atkin 相合式チェック 不該当（！？）
5 | > pn86754 -> 0 NB. Ramanujan 相合式チェック 合格
7 | > pn86754 -> 0 NB. Ramanujan 相合式チェック 合格
11 | > pn86754 -> 5 NB. Ramanujan 相合式チェック 不該当

前回、 **Atkin** 相合式チェックの候補者のつもりでトライしたのに不該当とは驚いた！

しかし、 **237 + 17303*i.7 ->** の結果は

237 17540 34843 52146 69449 86752 104055 であるから、与数の転記を間違えたのだ。 本当の候補者は **86752** とすべきであったのだ。

● 再計算 正しい与数 ８６７５２ に対しては

tc ' wr pn86752 =. part_yn 86752 ' NB. 2008. 6. 27 pm. 5.20
2173308840 ....
9107850205 ....
0434552196 ....
1063287020 ....
16226.9

24 60 60 #: 16226.9
4 30 26.9 NB. ４ 時間 ３１分

#: ": pn86752
323 NB. ３２３桁

相合条件チェック

13 | > pn86752 -> 0 NB. Atkin 相合式チェック 合格！
5 | > pn86752 -> 0 NB. Ramanujan 相合式チェック 合格
7 | > pn86752 -> 6 NB. Ramanujan 相合式チェック 不該当！
11 | > pn86752 -> 0 NB. Ramanujan 相合式チェック 合格

これで納得！ 前回、７時間余の計算の後、**out of memory error** の為、断念した計算が、新パソコン配達の、その日の内に再計算 して合格とは！
確かにマシンを更新した甲斐あり！

正解（３２３桁）を下掲する。 （見易くする為、５桁毎にスペース挿入）
6 50 $ ": > pn86752 ＆ _23 {. ": > pn86752

21733 08840 36203 09865 30247 82662 08809 18613 41882 60101
05094 41057 90292 52370 06910 78502 05471 42121 26556 04871
84184 12886 11184 16180 09537 51034 38936 38384 17930 43455
21969 02995 08079 19005 60916 74141 72599 86475 12591 83288
05995 46533 46652 21063 28702 08488 72644 11787 34379 24220
88888 72241 54105 62751 18669 91825 15734 57000 20405 52884
17622 95645 98558 40313 680

以上は、前回 （**Sharp** マシンでは）不可能だった分の報告である。 中野の計算が（近似などは含まず）有効桁数内で **EXACT** なものである事は御理解頂きたい。
● **Sharp** マシン での最後 **n = 69449** で比較すると、数値解（**288**桁あり）は一致。

演算時間のみが、前回の **7 h 7 s** から **2 h 50 m**、即ち約　３分の１　に短縮された。　これは、 **Sony** マシンに交替した素晴らしい効き目である。

２．　与数　１０万　台の　整数分割

Atkin 相合式判定の前節の予定では、次の候補は

● 与数　　１０４０５５

tc ' wr pn104055 =. part_yn 104055 '   NB. 2008. 6. 28. am. 8:43

3115232508 ....
1109006464 ....
2587146594 ....
5716187025 ....
22695.5

24 60 60 #: 22695.5   NB. pm. 3:01
6 18 15.5   NB. ６　時間　１８　分

 # ": pn104055 -> 354   NB. ３５４桁

相合式チェック

13 |　 > pn104055 -> 0　 Atkin OK!
13 | 1 + > pn104055 -> 1　　偶然でない証拠
13 | 12 + > pn104055 -> 12　　〃
13 | 13 + > pn104055 -> 0　　〃

5 |　 > pn104055 -> 1　　〃
7 |　 > pn104055 -> 2　　〃
11 |　 > pn104055 -> 0　 Ramanujan OK!
17 |　 > pn104055 -> 1　　偶然でない証拠
19 |　 > pn104055 -> 15　　〃

正解（３５４桁）を下掲する。　（見易くする為、５桁毎にスペース挿入）
7 50 $ ": > pn104055 ＆ _4 {. ": > pn104055

31152 32508 87633 30954 89373 78476 51289 20317 44251 99968
87486 73127 23999 04870 75110 90064 64980 18782 36899 20059
36771 41917 91553 00425 82480 05596 40851 79999 91852 58714
65943 05845 68528 04358 55718 53063 45621 28169 90458 84249
54122 26227 71125 25716 18702 59493 25045 67065 65847 60169
70573 73853 22517 97351 66185 63685 61331 07479 56067 99581
83383 98764 20924 29253 53862 02051 08692 61852 30884 70170
1766

▲　 **Atkin** 相合条件での続く候補は
１２１３５４、 １３８６６１、 １５５９６４、 １７３２６７、 １９０５７０、 ２０７８７３、 ２２５１７６　 等々 であるが、余り近過ぎるのや、離れ過ぎのものも不安であるので、

与数　 n =. 5 + 7 * 2000　-> 140005 を選んトライした。
７で整除される例である。

◆　tc ' wr pn140005 =. part_yn 140005 '　NB. 2008.7.9. am. 10:40 starts

69627 ....
72462 ....
47753 ....
06824 ....
41281.8

24 60 60 #: 41281.8 - > 11 28 1.8 NB.　１１時間半後　完了！

": > pn140005 - > 411 NB.　４１１桁

結果は　７　で整除される　（Ramnujan の相合条件には合格）
１３　でも　整除される。　（Atkin の条件では無いけれども）
３、５、１１　等では整除されぬ。

計算で得られた分割数（４１１桁）は
8 50 $ ": > pn140005　＆　_11 {. ": > pn140005 から

69827 35995 49341 20051 27612 83947 36192 64782 46060 23911
67447 44629 65103 72187 56724 62259 25641 85838 78027 72528
30723 57422 93416 71718 49908 27037 69699 40356 20784 77538
37676 66905 11458 74881 43066 24367 08865 44275 60284 44648
18526 43067 60082 70682 42516 56889 82423 40155 65929 72360
56222 83785 56198 86730 46131 52534 49180 84818 20479 09654
52251 07153 41474 43376 97631 84139 28119 20609 87722 27967
10759 39938 19521 86918 85862 10627 68827 95264 83572 94318
76155 41570 6

３．　Hardy-Ramanujan の　漸近式との比較

整数分割の話題を楽しく紹介している啓蒙書にカルヴィン・Ｃ・クロースンの名著「数学の不思議」がある。　（文献６）
その p. 301 付近に、整数分解　p(n) の非常に正確な概算がえられる近似式が紹介されている。　Hardy - Ramanujan の asymptotic equation （1916, 1918）と呼ばれる（文献７、p.2160）。

rama(n) = p(n) 〜　exp(π √(2n/3)) / (4n √(3))　.........

例　０）　n = 302

解の真値は、与数 10,000 以下については、一般にインターネットのウエブサイトに公開されている値と見られる。 n = 302 では　prime 素数 である。
上に示した漸近式 p(n) で、初項のみを用いた場合を rama (n) とすれば、今の例では、答は 100分の 1秒程度の瞬間に得られるが、真値との差は 2.53% ほどである。
中野関数　part_yn による計算値を yn 値と呼ぼう。 これは Exactly に真値と

一致する！

近似値　　rama値　　10933982000725688　　１７桁
真　値　　yn 値　　10657331232548839　　prime （素数）

▲　逆に云へば、この rama値　と数パーセント以上異なる値は真値では無い。
数パーセントの差とは桁数が合い、有効数字で 先頭の２桁が合っている事である。
すなわち、桁数が 合わないようでは、その計算は全く問題にならない！
これは最低の比較要件である。
その観点の例を下掲する。　それに次いで更に、相合式条件を顧慮すべし！

● 超長大数に於けるラマヌジャン漸近近似値との比較

例　１） n = 10004
rama値　3.82249e106　107 桁　time 0.0141755 sec
yn 値　3805573826　107 桁　time Sharp 7 m 44 s
Sony 2 m 26 s

２） n = 17540
rama値　2.839e142　143 桁　time 0.0141454 sec
yn 値　2829507495　143 桁　time Sharp 24 m 8 s
Sony 8 m 18 s

３） n = 34834
rama値　3.42362e202　203 桁　time 0.0149078 sec
yn 値　3415492065 ,,,,　203 桁　time Sharp 1 h 39 m
Sony 38 m 16 s

４） n = 52146
rama値　6.78553e248　249 桁　time 0.0142356 sec
yn 値　6772368558 ....　249 桁　time Sharp 3 h 49 m
Sony 1 h 32 m

５） n = 69449
rama値　7.84137e287　288 桁　time 0.0142513 sec
yn 値　7828188618 ....　288 桁　time Sharp 7 h
Sony 2 h 50 m

６） n = 86752
rama値　_ （無限大）　1 桁　time 0.0139434 sec
yn 値　2173308840 ....　323 桁　time 4 h 31 m Sony

７） n = 104055
rama値　_ （無限大）　1 桁　time 0.0138026 sec
yn 値　3115232508 ....　354 桁　time 6 h 18 m Sony

８） n = 140005
rama値　_ （無限大）　1 桁　time 0.0136744 sec
yn 値　6982735995 ....　411 桁　time 11 h 28 m Sony

与数が７万台を超えると、驚いた事に、Hardy-Ramanujan の漸化式ですら、無限大値を与えて仕舞う！　この辺が rama値　の使用の限界である。
それに対して、中野関数　part_yn は、平気で演算を継続し、結果値も、相合式条件（ラマヌジャンやアトキン等々の）に調和するので、正解と見られる（少なくとも否定

する事は出来ない）。　全数一致 **EXACT** であるから、これは驚くべきことかも知れぬ！
逆に云へば、与数が ７万以上　の分解問題では、相合式だけが正否の判定条件となるであろう。　他に判定条件を探せたら、その数学的価は大きい！

４．　計　算　時　間　の　こ　と

すでに前の第４報（文献１）で「３．　中野　の　長大計算結果の　グラフ表示」なる報告があるが、マシンが更新され、データが大幅に増加したので、新しい情報を述べよう。　長大につき、適当に整理した形である。　内容は下記のもの。

与数	分解値又は（桁数）	相合式整除数	計算時間（秒）、（時分秒）	
5	**7　(1)**	**prime**	**0.00948864**	
10	**42　(2)**	**mod 7**	**0.00928861**	
100	**190569292　(9)**		**0.16981**	
289	**(16)**	**mod 5**	**0.246291**	
294	**(16)**	**mod 13, 5, 11**	**0.261332**	
302	**(17)**	**prime**	**0.259692**	
1000	**(32)**		**1.66757**	
1500	**(40)**	**mod 11**	**3.52542**	
2000	**(46)**	**mod 7**	**6.037**	
3601	**(63)**	**mod 5, 7**	**18.5319**	
5009	**(75)**	**mod 5**	**35.8466**	**36 s**
7012	**(89)**	**mod 7**	**70.2248**	**1 m 10 s**
9999	**(107)**	**mod 5**	**145.546**	**2 m 26 s**
10014	**(107)**	**mod 5**	**147.008**	**2 m 27 s**
17540	**(143)**	**mod 13, 5, 7, 11**	**498.093**	**8 m 18 s**
21026	**(157)**	**mod 7**	**752.734**	**12 m 33 s**
28033	**(182)**	**mod 7**	**1416.43**	**23 m 37 s**
30034	**(188)**	**mod 13, 5**	**1734.8**	**28 m 55 s**
34834	**(203)**	**mod 5**	**2295.99**	**38 m 16 s**
44050	**(229)**	**mod 11**	**3787.09**	**1 h 3 m**
52146	**(246)**	**mod 13, 11**	**5487.66**	**1 h 32 m**
55059	**(256)**	**mod 5**	**6274.58**	**1 h 45 m**
69449	**(288)**	**mod 13, 5**	**10189.1**	**2 h 50 m**
77083	**(304)**	**mod 11**	**12718.9**	**3 h 32 m**
86752	**(323)**	**mod 13, 5, 11**	**16226.9**	**4 h 31 m**
104055	**(354)**	**mod 13, 11**	**22695.5**	**6 h 18 m**
140005	**(411)**	**mod 13, 7,**	**41281.8**	**11 h 28 m**

５．　中野　の　長大計算結果の　グラフ表示　（続）

前月の報告（**Sharp** マシン）に続き、当　７月分（**Sony** マシンで）の結果を、幾つかの　グラフ で示そう。

横軸は分解の対象である与数。　正の整数　１４０００５ 迄（２００００刻み）

グラフ１：　縦軸は **PARTITION** の解、即ち分解の個数の数値と云いたいが、それは膨大な数値なので、取りあえず、その数値の桁数（ **10** ならば **42**　通り故 ２桁、

100 ならば ９桁）を採る。
最高は、与数 140005 （１４万）の分解数の桁数　４１１　である（絶対値では 10^411 程度）。　カバー範囲は、前月のそれの ４倍 程度である。
縦軸は、求められた PARTITION Number の対数表示に近いものと理解出来よう。

グラフ２：　縦軸は　演算時間（ sec、　高速の Sony マシンによる）。
例えば　与数 10 で 0.009 sec、 100 で　0.17 sec、前月の最大与数 69449 （約 ７万）では旧値　25207 sec （約 ７ 時間）の　３分の１程度の　２　時間５０分に短縮された。　本月の最大与数 １４万に対しても、 41281.8 sec （１１時間２８分）であった。
与数が数百や数千では、このグラフの左隅、僅かに原点付近の直線部が対応する。　ここまで、Ｊ言語で計算出来たとは、喜びであった。

６．　ライバル　MATHEMATICA の　限界

PARTITION の問題では、**STACK OVERFLOW** エラー対策の都合で、数学ソフト
MATHEMATICA が **MAPLE V**　に優る。　では、 **MATHEMATICA** は、数万台の長大与数では
如何であろうか？　**MATHEMATICA 2.2** 版でトライした結果を述べておく。

PartitionsP[9999]　で、重大エラー「一般保護違反」が発生し、終了せざるを
得なくなった。　そこで、小さな与数から再出発すると

PartitionsP[4999]　正しい結果が　**34**　分で出た。
PartitionsP[5001]　正しい結果が,僅々　**3**　分で出た。
PartitionsP[5999]　正しい結果が,僅々　**7**　分で出た。
PartitionsP[6999]　正しい結果が, **12**　分で出た。
PartitionsP[7999]　正しい結果が, **11**　分で出た。
PartitionsP[8999]//Timing　で、　正しい結果が, なんと　**0.sec** で出た。
PartitionsP[9999]//Timing　で、　正しい結果が今度は **623 sec** で出た。
PartitionsP[10001]//Timing　で、　正しい結果がなんと　**2. sec** で出た。
処理時間にバラツキがあるのは、我が　Ｊ言語　の　メモリー関数 **M.** の効果
云々の場合に似ているように思われる。
しかし、それ以上では、再び「一般保護違反エラー」や、エラー「必要なファイル
ハンドルが不足のため、**MS-DOS** の初期化が出来ません」などが発生し、不可能！！

天下の　**Mathematica** でも、最新版はいざしらず、旧版では、こんなものだ！
中野は、Ｊ の最新版で立ち向かったのだから、有利ではあるが大いに喜ばしい！

７．　む　す　び

整数分割問題のおかげで、ボケ防止をかねて楽しませて頂いた。
長大な与数での計算に於いては、Ｊ言語が有名な数学ソフト **Maple** や　**Mathematica**
に充分、競争出来た。　なにしろ、 **Hardy-Ramanujan** の漸近近似解さえ不可能な範囲
まで **EXACT** な結果を出せたのだ。　この先の議論にも望みが持てそうだ。
中野の **Partition** 関数　**" part_yn "**　の詳細は、これらの実績が認識された後にでも
述べた方が、理解して頂け易いであろう。

西川会長の御心配の如く、「コンピュータの問題」が、先ず、大きくのし掛って
來たが、我が 「Ｊ言語」 は、与数　１４万 程度まで、正しく処理出来たらしい。
（一応、チェックＯＫ！）
取りあえずの「むすび」としたい。

この後は、西川会長の申される「数学の議論に集中して」、我ら　JAPLA の会友の皆様
大いに、　ガンバロー！

文　　　献

１）中野嘉弘「超長大整数の分割計算　（第４報）70,000 までの　PARTITION 」
　JAPLA 2008/June/28　pp. 8
２）中野嘉弘「整数分割　PARTITION 計算の話題（第２報相当）　演算結果は果たして
　正解か？」 JAPLA 2008/Apr/26　pp. 8
　－ａ）中野レプライ・メール：宛先　<JAPLA@aplsoft.co.jp> 2008.5.5 9:59
　　Re:（中野）SHIM JAPLA Apr '08 「確かに高速、wunderbar! しかし、結果は
　　P（294 以上）では怪しい！ 奮闘を祈る！」
３）中野嘉弘「整数分割　PARTITION 計算（第３報）」再三度のチェックを望む。
４）西川ＦＡＸ（'08 5. 30. 7:19 PM）問題は、数学かコンピュータか？
５）中野嘉弘「PARTITION 計算　世界の動向　（第５報） Maple でも 誤答」
　JAPLA 2008/July/26 pp.3 予定
６）カルヴィン・Ｃ・クロースン Calvin C.Clawson 著・好田順治訳「数学の不思議
　Mathematical Mysteries 」　青土社、1998.3　第１刷、pp.406
７）Eric W. Weisstein : " Second Edition CRC Concise Encyclopedia of
　MATHEMATICS " Chapman & Hall/CRC　2003