

## 整数分割 PARTITION 計算の話題

演算結果は果たして正解か？

中野嘉弘 (札幌市南区・85才)

FAX 専 011-588-3354      yoshihiro@river.ocn.ne.jp

順列・組合や分割法など長大計算が正解か否か、どうしたら分かるのか？  
確かめて見た。その例を話題とする。

### 0. は し が き

「はしがき」の冒頭は筆者の旧稿「組合せ (Combination) 計算の話題」(文献0)のそれと共通である。

JAPLA 1月例会の西川論文「J602の新機能 M.について(続き)」(文献1)を拝見中に気付いた話題がある。新機能 M. (Memorize) を用いれば、メモリーオーバーになるかも知れぬ問題が、瞬時に解ける例があるとの事だ。

西川の例は「整数の分割 (Partition) が幾通りあるか？」であった。  
例えば、 $p(1) = 1$ ,  $p(2) = 2$ ,  $p(5) = 7$ ,  $p(10) = 42$ ,  $p(100) = 190569292$ ,  
 $p(200) = 3972999029388$  であった。

この際、計算をカナダ産の有名な数学ソフト Maple V (学生版) でのトライでは、 $p(200)$  相当の `numbpart(200)` で STACK OVERFLOW エラー を発するので、J言語の方がベター云々の記述が見えた。

しかし、中野のトライでは、格別悲観的でも無い。  
多少遡って、例えば `numbpart(150)` 辺りから、再出発して、再計算すれば、何とか突破出来るのだ。その繰り返して、遥かに大数の、なんと `numbpart(1550)` が 50桁の数 6648312965925656816271400679772663779731 通りと計算出来た。  
この件を中野は西川宛に FAX した。(文献2)  
だがしかし、これが「末尾まで正解」であると思う根拠は何処にあるだろうか？

ところで、同様に大数になるであろう「順列・組合せ」の個数ならば、どうか？  
10ケの順列の個数  $!10 = 3628800$ 、 $!11 = 39916800$  等は、論理が単純だから、計算機を信用するのに不安は無いだけの話であるまいか？  
それでも、「順列・組合」のリストを表示せよとなれば、至難の技である。  
有名な数学ソフト Mathematica や Maple でも難儀らしく、解説や例題も乏しい。  
しかし、リストの末尾の10ケほどを表示せよ程度ならば、出来てもよからうに。  
前記の有名数学ソフトでさえ、そもそも、そんな機能は避けているらしい。

本題の「分割 Partition」のリストともなったら、さらに難しかろう。  
しかし、今は取りあえず、最も簡単な「幾通りか？」に重点を置こう。

実は、西川は取り上げていなかったが、J602 beta (文献3) では、M. 関数を Combination 関数 `comb` に適用しようとして、実は何もしていない、奇妙に中途半端な例題があるのだ。しかし、西川は、「M. 関数の効き目」の例題を、「分割」問題

で示しているので、言及したい。(文献4)

## 1. 会友と「分割」問題へのタッチ

暦の順では無くて、判り易さの順に選んで見よう。(敬称略)

- 1) 鈴木義一郎「数の分割 (Partition) について」 JAPLA '08/2/23 pp.4  
分割リストの表示を考える。  
分割数は、5 ~ 10 (文献5)
- 2) 西川利男「数の分割とフェローズ Ferres の図」 JAPLA '08/2/23 pp.3  
分割リスト関数 `part n` 例は `n=.6`  
分割個数関数 `partn n` 例は `n=.6`、結果は 11 通り (文献6)
- 3) 志村メール「分割法 原始的積み上げ法」 JAPLA discussion '08.3.24 pp.2  
再帰も M. も不使用。 `partition n (n=5)` から開始。  
`n=20` では、西川先生と結果は合う。 `n=30` 位で顎が出る(高橋尚子状態)。  
`n=100` では悲惨な結果も。とにかく、計算結果をストアして、再利用しながら先へ進んでいます (文献7、中野註：これが重要、或種の M. 法であろうか?)

## 2. 西川著多数中の有効な論文

上記、志村メールで「西川先生と結果は合う」は、具体的には、どの論文を意味するのか? はっきりしないが、抜群に有功な論文があった事は事実である。それは、かなり先の1月(JAPLA 研究会資料 2008/1/26)のもの  
「J602の新しい機能M. について(続き)

数の分割 (Partition) とそのJプログラム」だった。(文献1)

本稿の「0. はしがき」で、中野が大いに論じたのもこれであったが、大変有効な論文であって、その p.3 のプログラムによる関数 `pnn` で殆どの答は出て仕舞うのだ。その p.5 には、巨大数 100 や 200 の分解例 `pnn 100` や `pnn 200` があった。

有名な数学ソフト Maple V との比較の問題について中野は先報(文献0)でコメントしたのであった。

つまり、Stack Overflow エラー になる数 `n` より少し小さな値まで遡って、計算を再試行すれば、容易に避けられる。中野は `n=1550` まではチェック済みであった。

しかし、それでも大きな問題が残る。それは、計算機が Stack Overflow エラーを起こさず、志村メールに云う「高橋尚子状態」も起こさず、無事に演算を出力したとしても、それが、「数 `n`」の分割数として、正しい保証は何処にあるか?! の問題である。

- 1) 例えば啓蒙書：カルヴィン・C・クロースン「数学の不思議」(文献8)

p. 298 表14 1-50の分割表

註：ミスー>正 数 25 1,958、 数 51 239,943

- 2) Eric W. Weisstein: CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS,  
Chapman & Hall/CRC 2002 pp.3242 (文献9)

p. 2157 Sloane の表より `n=10` で 42, `n=50` で 204226

`n=100` で 190569292

`n=150` で 40853235313

`n=200` で 3972999029388,

`n=250` で  $2.307 \times 10^{14}$  詳しくは 230793554364681

`n=300` で  $9.253 \times 10^{15}$  詳しくは 9253082936723602

- 3) 最も簡単なのは、有名な数学ソフト Maple V の結果と比較する事だ。

- 4) 西川関数  $p_{nn}$  の結果との比較でも良い。 ( Maple V との一致が良いので)
- 5) 漸化式の利用: これでは、結局全部を計算するが、要所々々でチェックすれば良からう。
- 6) ラマヌジャンの mod 関係:  $P(n) = nr$  の時
- a)  $n = 5m + 4$  ならば  $nr = 0 \pmod{5}$  即ち 5 の倍数
  - b)  $n = 7m + 5$  ならば  $nr = 0 \pmod{7}$  即ち 7 の倍数
  - c)  $n = 11m + 6$  ならば  $nr = 0 \pmod{11}$  即ち 11 の倍数
- この関係式を利用すれば、検算は簡単である。 (文献 8、10-a)

### 3. 漸化式 の 利用

啓蒙書: クロースン著「数学の不思議」(文献8) p.300 に、漸化式を利用した分割数の計算法がある。西川論文(文献1)にもインドの天才・ラマヌジャンの仕事として紹介されている。志村メールでは、敢えてこの手法を避けている。その理由は次の如し。西川曰く「この計算は大変な忍耐力を要する。途中で一ヶ所でも間違えたら、それから先は、すべて水の泡である。」と。

しかし逆に、要所々々でチェックすれば、それ以前の計算は、まず、全て正しいとも言えるので、検算としては、一挙・簡単である。中野はこの方法を採用する。逆に、計算ミスが見付かれば、そこで修正して、更に前進すれば良い。

漸化式の原理は、すでに多くの教科書類に紹介されているので省く。

Euler 大先生の母関数

$$P(n) = \sum (-1)^{(k+1)} [P(n - k(3k - 1)/2) + P(n - k(3k + 1)/2)]$$

ただし  $\sum$  は  $k=1$  から  $n$  まで

による中野の J プログラムのみを掲げる (J602版)。

```

PN=: 3 : 0
n=. y
x: pnn=. 0
nk0s=.0
k=.1
while. k < 20 do.
NB. wr 'k=', ": k
k30=. k*((3*k)-1)%2
nk=. n - k30
if. nk < 0 do. nk0s=.nk0s+1 NB. pnk1 =. 0
goto_e. end.
x: pnk0=. nk { pns
k31=. k*((3*k)+1)%2
nk=. n - k31
if. nk < 0 do. pnk1 =. 0
nk0s=.nk0s+1
goto_0. end.
x: pnk1 =. nk { pns
label_0.
x: pnn=. pnn + ((_1)^k)* (pnk0+pnk1)
NB. if. nk < 0 do. goto_e. end.
if. nk0s > 2 do. goto_e. end.
k=. k+1

```

end.  
label\_e.  
x: -pnn  
)

#### 4. 演算時間の例

数値は中野のマシンにて：

- 1) 志村プログラム (文献7) で：

```
partition 20 -> 627 time 0.035 sec  
partition 30 -> 5604 time 0.83 sec  
partition 40 -> 37338 time 12.79 sec  
partition 45 -> 89134 time 38.14 sec かなり遅いな
```

- 1 - a) 志村第2プログラム (文献7 - a)

tc は timer 関数と同じで：

```
tc 'a45 =. partition_nr 45' -> 0.14 sec 迅速化された  
配列 $ a45 -> 45 2 先の 45 は n 値 1 ~ 45  
後の 2 は 対応する 分割数値  
1 ~ 89134
```

```
tc 'a100 =. partition_nr 100' -> 1 sec  
tc 'a200 =. partition_nr 200' -> 8.7 sec  
tc 'a294 =. partition_nr 294' -> 27 sec  
配列の最後 x: { : a294 -> 294 6039763882095516  
比較 Maple V numbpart(294) -> " 515
```

```
tc 'a300 =. partition_nr 300' -> 28.7 sec  
配列の最後 x: { : a300 -> 300 9253082936723604  
比較 Maple V numbpart(300) -> " 602
```

- 2) 西川第2プログラム (文献1) で： pnn は西川関数 として

```
timer ' pnn 45 ' -> 8.35e_5 sec かなり迅速！  
timer 'wr pns294 =. pnn 294' -> 2.375 sec  
x: pns294 -> 6039763882095514
```

- 3) 中野プログラム PN (本稿 3. 節) で： PN は中野関数 として

```
timer ' PN 45 ' -> 0.0004 sec 即ち 4e_4 sec 適当に迅速  
timer 'wr pn45 =. PN 45' -> 時間 0.0085 sec と 結果 89134  
timer 'wr pna294 =. x: PN 294' -> 0.01 sec 6039763882095516
```

- 4) 中野： 演算結果を配列 pns に格納して置き、それから呼び出す方法では

```
timer ' 45 { pns ' -> 3.7e_5 sec 圧倒的に迅速  
timer ' wr x: pna294 =. 294 { pns ' -> 0.004 sec 6039763882095516
```

5) 上記の計算は、互いに末尾が異なる (4 と 6)。 皆、誤解らしい?

6) 山下の最近の FAX: 同様な「漸化式法」の例と意見が来信した (文献 10、 $10 - a$ )。しかし、上記の例に比べて、演算に、かなり長時間を要しているのは不思議である。

## 5. 分割表 p n s の性質

1) 結果が 5 で整除されるもの (末尾が 0 か 5) を示す。  
前節の 5) の項の話題である。この表の最後の行の情報から、我らの計算は、 $P(n)$ 、 $n < 294$  が、残念ながら、限度だと思われる。  
これをもって、「結び」の言とする事も出来よう。

```
load 'c:\documents and settings\yoshihiro\j602-user\temp\partyn.ijs'  
$ pns -> 314
```

$n = 4 + 5 * k = i. 60$  の場合:

```
pns60 = (4 + 5 * k = i. 60) { pns
```

```
x: 15 4 $ pns60
```

5	30	135	490
1575	4565	12310	31185
75175	173525	386155	831820
1741630	3554345	7089500	13848650
26543660	49995925	92669720	169229875
304801365	541946240	952050665	1653668665
2841940500	4835271870	8149040695	13610949895
22540654445	37027355200	60356673280	97662728555
156919475295	250438925115	397125074750	625846753120
980462880430	1527273599625	2366022741845	3646072432125
5590088317495	8528581302375	12950095925895	19573856161145
29454549941750	44132934884255	65851585970275	97862933703585
144867692496445	213636919820625	313891991306665	459545750448675
670448123060170	974834369944625	1412749565173450	2040825852575075
2938929793929555	4219388528587095	6039763882095516	8620496275465026

第1行は  $k = 0 1 2 3$  即ち  $n = 4 9 14 19$  に対応する 分割数

終行は  $k = 56 57 58 59$  即ち  $n = 284 289 294 299$  に対応する 分割数

剰余  $5 | p(n) \rightarrow 0 0 1 1$

最後の2例は 不都合! この辺が限界!

2) 計算結果が 7 で整除される例 :

```
pn7=(5+7*i.45){ pns
$ pn7
```

45

```
x: 11 4 $ pn7
```

	7	77	490	2436
	10143	37338	124754	386155
	1121505	3087735	8118264	20506255
	49995925	118114304	271248950	607163746
	1327710076	2841940500	5964539504	12292341831
	24908858009	49686288421	97662728555	189334822579
	362326859895	684957390936	1280011042268	2366022741845
	4328363658647	7840656226137	14070545699287	25025873760111
	44132934884255	77195892663512	133978259344888	230793554364681
	394723676655357	670448123060170	1131238503938606	1896564103591584
	3160137867148997	5234371069753672	8620496275465026	14118662665280004

```
7 | x: 11 4 $ pn7
```

```
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 1 6
```

```
x: (299 306) { pns
8620496275465026 14118662665280004
```

```
7 | x: (299 306) { pns
```

1 6

最後の 2 例はまずい。

3) 計算結果が 11 で整除される場合:

```
pn11=(6+11*i.29) { pns
$ pn11
29
x: pn114=.7 4 $ pn11
      11      297      3718      31185
      204226    1121505    5392783    23338469
      92669720  342325709  1188908248  3913864295
      12292341831 37027355200 107438159466 301384802048
      819876908323 2168627105469 5590088317495 14070545699287
      34643126322519 83561103925871 197726516681672 459545750448675
1050197489931117 2362219145337711 5234371069753672 11435542077822104
11 | x: pn114
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0

_5 { (6+ 11* i.29)
270 281 292 303 314
270 281 292 303 314 { pns
1.0502e15 2.36222e15 5.23437e15 1.14355e16 2.46501e16
x: 270 281 292 303 { pns
1050197489931117 2362219145337711 5234371069753672 11435542077822104
11 | x: 270 281 292 303 { pns
0 0 0 0
```

此処までは良かったが、 $n = 314$  では、整除されなかった。

```
x: 314 { pns
24650106150830544
11 | x: 314 { pns
10
```

この辺が、我らの計算の限界であろうか？

## 6. む す び

整数の分割数の計算を、いろいろ調べた。  
J 言語利用では、西川の第2プログラムが秀逸であった。

数学ソフト Maple V 並に信頼出来る。

漸化式法と併用すれば有効であろう。

しかし、J言語による我らの目下の方法では、数 300 の分解近くでは、信頼が薄れる。限界であろう？

実は、世の中には、もっと優秀な方法もあるらしいので、頑張らなくちゃ！

(文献 11)

## 文 献

- 0) 中野嘉弘：「組合せ (Combination) 計算の話題」 JAPLA 2008/2/23 pp.9
- 1) 西川利男：「J602の新しい機能M. について (続き)、  
数の分割 (Partition) とそのJプログラム」 JAPLA 2008/1/26  
pp.7
- a) 「J602の新しい機能 M. について」 JAPLAシンポジウム資料  
2007/12/8 pp.1
- 2) 中野FAX：「Maple V numbpert(1550) までのテスト」 pp.5 2008/1/30
- 3) J602-beta タスクバー Help Vocabulary M. Memo関数 timer fib pn  
関数 comb と 例. 3 comb 5 のリスト
- 4) 西川FAX：「分割数、Maple V numbpert(100)、M. の効果？」
- 5) 鈴木義一郎：「数の分割 (Partition) について」 JAPLA 2008/2/23 pp.4
- 6) 西川利男：「数の分割とフェラーズ Ferres の図」 JAPLA '08/2/23 pp.3
- 7) 志村正人：メール「分割法 原始的積み上げ法」 JAPLA discussion '08.3.24
- a) 志村：メール「partition\_nr 数だけ数える法 500 で 90 sec、  
200 まで 西川、N.Thomson と同じ解」 JAPLA discussion '08.3.28
- 8) Calvin C. Clawson 原著・好田順治 訳：「数学の不思議」 青土社 1998.3  
pp.412
- 9) Eric W. Weisstein: CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS,  
Chapman & Hall/CRC 2002 pp.3242
- 10) 山下紀幸 FAX '08.4.18.10:10  
「恵羅・土屋『組合せ論』漸化式では、所要時間：400 MHz 機で、  
p(25) 4 min、p(50) 162 min、p(100) 64.3 hours = 手計算 2 hours」  
(中野註：何故、長時間を要したか？ 不思議である。)
- a) 山下 FAX '08.4.19.12:00  
「p(294) の値は、ラマジュアンの条件  $p(5m+4) \equiv 0 \pmod{5}$  により、末尾は  
0 または 5 の筈である。それを満たさないで、いずれの答もアウト！  
と考える。」なお、p(294) の値の手計算は無理だと思うので辞退する。
- b) 山下 FAX '08.4.21.13:00 私の手計算の限界  
p(114) = 952050665 9桁 (中野註：正解 =  $5 \cdot 193 \cdot 986581$ )  
今後は、指数公式 (近似) にて！
- 11) 例えば Partition Number (n = 0 to 1000)  
with Factorization results

<http://www.asahi-net.or.jp/~KC2H-MSM/mathland/matha1/matha145.htm>



