レスリー行列と人口問題

Masato Shimura
JCD02773@nifty.ne.jp

2008 年 7 月 23 日

目次

1　マルコフの推移確率

1.1　マルコフ連鎖

確率密度関数が $p(x_{n+1}|x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdot) = p(x_{n+1}|x_n)$ の性質を持つとき、これをマルコフ性という。現在 (x_n) のみが将来 (x_{n+1}) を定める過程である。マルコフ性を持つ確率過程をマルコフ過程という。

フロベニウスの定理：　非負正方行列に対しては絶対値最大の固有値は必ず正の実数であり、その固有値に対する固有ベクトルは非負ベクトルである。

[*1]

1.2　マトリクスの計算

1.2.1　$(I - Q)^{-1}$

吸収型 (推移確率のいずれかが 1 のとき)
Q の固有値が 1 より小さいので
$Q^n \to 0 (n \to \infty)$
$I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$
が成り立つ。

1.2.2　マトリクスの内積

`] q`	`q +/ . * q`	`q +/ . * q +/ . * q`
`0 0.9    0   0`	`0 0 0.855    0`	`0 0 0 0.684`
`0   0 0.95   0`	`0 0     0 0.76`	`0 0 0     0`
`0   0    0 0.8`	`0 0     0    0`	`0 0 0     0`
`0   0    0   0`	`0 0     0    0`	`0 0 0     0`

*1 レオンテェフ逆行列と同一の構造である。

1.2.3　マトリクスとベクトルの内積

ベクトル

```
  0 1 2 3
```

を Q にかける場合、次のように 1 段ずつ左右を掛け合わせ、列（横）の合計を求める。従って年齢の要素の合計を求めることができる。

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3
\end{array}
$$

```
  q +/ . * 0 1 2 3
0.9 1.9 2.4 0
```

2　平均寿命

2.1　小さな Example

<table>
<tr><td>Input data type
死亡率</td><td><pre> ALIVE_RATE
0 0.1
1 0.05
2 0.2
3   1</pre></td><td></td></tr>
<tr><td>吸収型マルコフ推移確率</td><td><pre> age_mat_sub0 ALIVE_RATE</pre>
$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$</td><td>$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

最初に出生を除いた現在の状態からのマルコフ推移確率行列を扱う。

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_0 r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_0 r_1 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

0 才の平均余命	$1 + r_0 + r_0 r_1 + r_0 r_1 r_2$	$1 + 0.9 + 0.855 + 0.684$
1 才の平均余命	$1 + r_1 + r_1 r_2$	$1 + 0.95 + 0.76$
2 才の平均余命	$1 + r_2$	$1 + 0.8$
3 才の平均余命	1	

0 才の平均余命が平均寿命である。

Q	q=:}."1}.age_mat_sub0 ALIVE_RATE 0 0.9 0 0 0 0 0.95 0 0 0 0 0.8 0 0 0 0	Q を抜き出す
$I - Q$	i_minus q 1 _0.9 0 0 0 1 _0.95 0 0 0 1 _0.8 0 0 0 1	

$(I-Q)^{-1}$
逆行列
	`%. i_minus  q`
	
	`1 0.9 0.855 0.684`
	`0   1  0.95  0.76`
	`0   0     1   0.8`
	`0   0     0     1`
		$(I-Q)^{-1}$ は $I+Q+Q^2+Q^3+\cdots+Q^n$ と同じである
		フロベニウスの定理

年齢毎に（横に）合計	`+/"1 %. i_minus }."1 }. age_mat_sub0 ALIVE_RATE`
	
	`3.439 2.71 1.8 1`
		横に合計を取る。　0 才の余命が平均寿命である。

スクリプトでまとめて計算する	`   alive ALIVE_RATE`
	`0 3.439   NB.` **平均寿命**
	`1  2.71`
	`2   1.8`
	`3     1`
		短いスクリプト　*alive*

2.2 Script

```
NB. --------Age Average-------------
alive=: 3 : '(i. # tmp),. tmp=. +/"1 alive0 y'

alive0=: 3 : ' %. (=/~i. # tmp) - tmp=. }.}."1  age_mat_sub0 y'
NB. (I-Q)^-1

age_mat_sub0=: 3 : 0
NB.   age_mat_sub ALIVE_RATE
Y0=: remove_null y NB. remove  no alive(not pass age)
RATE0=. 1- }: {:"1 Y0
MAT0=. (SIZE=: 2# (<: # Y0)) $ 0
DIAG=. diag i. SIZE
MAT0=. SIZE $ ( RATE0)  (DIAG)};MAT0
MAT0=. ({:"1 Y0),. 0,. MAT0,0
```

```
MAT=. (1,(# MAT0)#0) , MAT0
)

remove_null=: 3 : ' (-. ( +/ "1 y e. 0) e. 2) # y'
```

2.3 ループを用いた解法

$Q.Q^2, Q^3$ の計算

マルコフの推移確率は定常分布があれば定常分布に収束する。この場合は単なる $Q.Q^2, Q^3$ の計算の様だ。

収束はかなり早い。格段を足し合わせると $(I-Q)^n$ と同じ解を得る

2.4 Script

```
markov_loop=: 4 : 0
ANS=. <TMP=. y
for_ctr. i. x do.
TMP=. TMP +/ . * y  NB. mp rightside
ANS=. ANS,<TMP
end.
({@> i. >: x),.,.ANS
)

i_minus=: 3 : '(=/~i.# y)-y'
```

```
   3 markov_loop  }.}."1 a
+-+---------------+
|0|0 0.9    0   0|
| |0   0 0.95   0|
| |0   0    0 0.8|
| |0   0    0   0|
+-+---------------+
|1|0 0 0.855    0|
| |0 0     0 0.76|
| |0 0     0    0|
| |0 0     0    0|
+-+---------------+
|2|0 0 0 0.684   |
| |0 0 0     0   |
| |0 0 0     0   |
| |0 0 0     0   |
+-+---------------+
|3|0 0 0 0       |
| |0 0 0 0       |
| |0 0 0 0       |
| |0 0 0 0       |
+-+---------------+
```

```
 +/  > }.("1)  3
 markov_loop  }.}."1 a

0 0.9 0.855 0.684
0   0  0.95  0.76
0   0     0   0.8
0   0     0     0
```

```
   3 markov_loop   a
+-+--------------------+
|0|   1 0   0    0   0 |
| | 0.1 0 0.9    0   0 |
| |0.05 0   0 0.95   0 |
| | 0.2 0   0    0 0.8 |
| |   1 0   0    0   0 |
+-+--------------------+
|1|    1 0 0     0    0|
| |0.145 0 0 0.855    0|
| | 0.24 0 0     0 0.76|
| |    1 0 0     0    0|
| |    1 0 0     0    0|
+-+--------------------+
|2|    1 0 0 0     0   |
| |0.316 0 0 0 0.684   |
| |    1 0 0 0     0   |
| |    1 0 0 0     0   |
| |    1 0 0 0     0   |
+-+--------------------+
|3|1 0 0 0 0           |
| |1 0 0 0 0           |
| |1 0 0 0 0           |
| |1 0 0 0 0           |
| |1 0 0 0 0           |
+-+--------------------+
```

2.5 Example Sheep の平均寿命

Sheep の実データが *Bradie* で紹介されていた。これを用いてスクリプトを検証しながら *Sheep* の平均寿命を計算してみよう。

```
   age_mat_sub0 1- 0 2{"1 SHEEP
    1 0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0.155 0 0.845     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0.176 0     0 0.824     0     0     0     0     0     0     0     0
0.205 0     0     0 0.795     0     0     0     0     0     0     0
0.245 0     0     0     0 0.755     0     0     0     0     0     0
0.301 0     0     0     0     0 0.699     0     0     0     0     0
0.374 0     0     0     0     0     0 0.626     0     0     0     0
0.468 0     0     0     0     0     0     0 0.532     0     0     0
0.582 0     0     0     0     0     0     0     0 0.418     0     0
0.711 0     0     0     0     0     0     0     0     0 0.289     0
0.838 0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0.162
    1 0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
```

$(I - Q)^n$

```
%. i_minus }."1 }.  age_mat_sub0 1- 0 2{"1 SHEEP

1 0.845 0.696 0.554 0.418 0.292 0.183 0.097 0.041 0.012 0.002
0     1 0.824 0.655 0.495 0.346 0.216 0.115 0.048 0.014 0.002
0     0     1 0.795   0.6  0.42 0.263  0.14 0.058 0.017 0.003
0     0     0     1 0.755 0.528  0.33 0.176 0.073 0.021 0.003
0     0     0     0     1 0.699 0.438 0.233 0.097 0.028 0.005
0     0     0     0     0     1 0.626 0.333 0.139  0.04 0.007
0     0     0     0     0     0     1 0.532 0.222 0.064  0.01
0     0     0     0     0     0     0     1 0.418 0.121  0.02
0     0     0     0     0     0     0     0     1 0.289 0.047
0     0     0     0     0     0     0     0     0     1 0.162
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1
```

（少数点下 3 桁まで表示）

列の合計（横）を求める。0 才の余命が $Sheep$ の平均寿命である。

```
(i.11),.+/ "1 %. i_minus }."1 }.  age_mat_sub0 1- 0 2{"1 SHEEP
 0 4.13936
 1 3.71522
 2 3.29517
 3 2.88701
 4 2.49935
 5 2.14499
 6 1.82905
 7 1.55837
 8 1.33582
 9   1.162
10       1
```

3 レスリー行列

$P.H.Leslie(1900-1974)$

Oxford に学び、Oxford の $Bureau\ of Animal\ Population$ に在籍

1940 年代のはじめに $Bxernardelli(1941)$,$Lewis(1942)$,$Leslie(1945)$ がマトリクスで人口や動物の生殖のモデル化に成功した。

1959　Leslie の改良版

1966 J.H. Pollard stocastic version

レスリー行列は出生率と生存率から x^{k+1} 年後の生存数を求めることができる。寿命の長い種は慣性（モメンタム）が働くので、生じた変化が人口数に現れてくるのに時間を要する。

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k)}$$

$birth \quad a_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n$

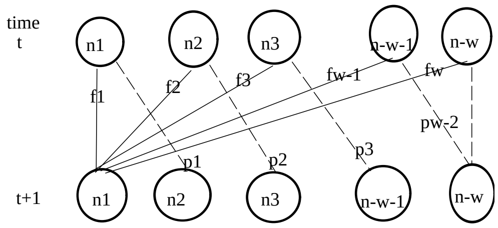
$death \quad b_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$

3.1 Example($Sheep$)

Input DATA:$SHEEP$

雌の羊の各年齢の出生率と生存率（食用は考えない）

```
(i.12),.   SHEEP
```



$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

図 1　mreg

age	(1)	ai **出生**	bi **生存**
0	1	0	1
1	1	0.045	0.845
2	1	0.391	0.824
3	1	0.472	0.795
4	1	0.484	0.755
5	1	0.546	0.699
6	1	0.543	0.626
7	1	0.502	0.532
8	1	0.468	0.418
9	1	0.459	0.289
10	1	0.433	0.162
11	1	0.421	0

$x_0 = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]$

(1) は生存数の初期値。1 の場合は比率となる。

これは $SHEEP$ の（1）の列に入れた。

（Caughley , data collected by Hicky)

3.1.1　レスリー行列

```
   leslie_mat0  {1 2 {|: SHEEP
0 0.045 0.391 0.472 0.484 0.546 0.543 0.502 0.468 0.459 0.433 0.421 0
1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0
0 0.845     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0
0     0 0.824     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0
0     0     0 0.795     0     0     0     0     0     0     0     0 0
0     0     0     0 0.755     0     0     0     0     0     0     0 0
0     0     0     0     0 0.699     0     0     0     0     0     0 0
0     0     0     0     0     0 0.626     0     0     0     0     0 0
0     0     0     0     0     0     0 0.532     0     0     0     0 0
0     0     0     0     0     0     0     0 0.418     0     0     0 0
0     0     0     0     0     0     0     0     0 0.289     0     0 0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0.162     0 0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 0
```

右引数はループ回数即ち推計年数である。10 で 10 年先まで、30 で 30 年先までである。（1000 年程度は可能）

出生数は雌雄の合計であれば 2 分の 1 に分ける。このデータは雌羊から娘羊が生まれる率に調整してあるようだ。

人の場合は男が 1.05 程度と多いのでその比率で分ける。

[*2]

[*3]

```
". 7j3 ":  (10;0) leslie_loop SHEEP
 0     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     12
 1 4.764     1 0.845 0.824 0.795 0.755 0.699 0.626 0.532 0.418 0.289 0.162 11.709
 2 2.889 4.764 0.845 0.696 0.655   0.6 0.528 0.438 0.333 0.222 0.121 0.047 12.138
 3 2.354 2.889 4.026 0.696 0.554 0.495  0.42  0.33 0.233 0.139 0.064  0.02 12.219
 4 3.173 2.354 2.441 3.317 0.554 0.418 0.346 0.263 0.176 0.097  0.04  0.01  13.19
 5 3.591 3.173 1.989 2.012 2.637 0.418 0.292 0.216  0.14 0.073 0.028 0.007 14.576
```

[*2] マトリクスは複雑になる。2 重にするかボックスを用いる

[*3] データが雌のみの出生率の場合はパラメータスイッチ (10;0) を, トータル（雌雄）の出生率の場合は (10;1) または 10 を用いる

6	3.756	3.591	2.681	1.639	1.599	1.991	0.292	0.183	0.115	0.058	0.021	0.005	15.932
7	4.187	3.756	3.034	2.209	1.303	1.208	1.392	0.183	0.097	0.048	0.017	0.003	17.438
8	4.612	4.187	3.174	2.5	1.756	0.984	0.844	0.871	0.097	0.041	0.014	0.003	19.084
9	4.964	4.612	3.538	2.615	1.988	1.326	0.688	0.528	0.463	0.041	0.012	0.002	20.777
10	5.392	4.964	3.897	2.915	2.079	1.501	0.927	0.431	0.281	0.194	0.012	0.002	22.594

3.2 固有値と固有ベクトル

```
1{char_lf   leslie_mat0  {1 2 {|: SHEEP
             1.08999   0.395417j0.520533
 0.395417j_0.520533   _0.174379j0.59078
 _0.174379j_0.59078  0.0932632j0.533933
0.0932632j_0.533933           _0.486984
 _0.380423j0.232537 _0.380423j_0.232537
 _0.235381j0.322598 _0.235381j_0.322598
       _7.91881e_15
```

最大固有値 1.08999 から羊の数は毎年 8.99% 増加する。

固有ベクトルから年齢階差と合計に対する分布率が得られる。

```
 固有ベクトル   分布率
   0.586481     0.23937 NB. 0-1 age
    0.53806    0.219608 NB. 1-2 age
   0.417124    0.170248 NB. 2-3 age
   0.315333    0.128702
   0.229992   0.0938707
   0.159308   0.0650211
   0.102163   0.0416974
  0.0586737   0.0239475
  0.0286373   0.0116882
  0.0109821  0.00448232
  0.0029118  0.00118844
0.000432766 0.000176632
          0           0
total 2.4501          1
```

```
require 'plot'
'line,stick' plot  {:"1 (50;0) leslie_loop SHEEP
pd 'eps /temp/sheep_leslie0.eps'
```

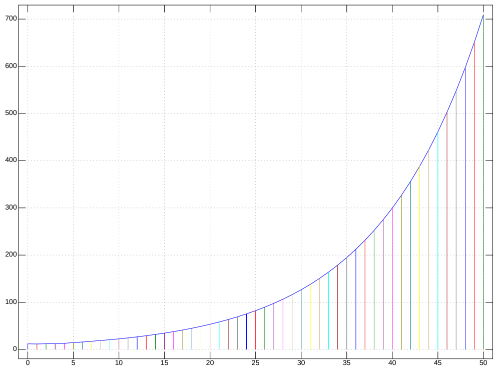


図 2　*Sheep*

4　人口とレスリー行列

2006 年の人口表からレスリー行列を用いて将来人口を推計する。出生率や死亡率は 2006 年で固定する。

出典：

生命表 `http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/life/20th/sh01.html`

人口は国勢調査による。

データの形式はつぎのとおり

```
 10{. 10}. DAT
 age pop(f)pop(m)birth   alive(f) alive(m)
10 616199 588325       0 0.99993 0.99991
11 617258 588164       0 0.99994 0.99991
12 608449 579067       0 0.99993  0.9999
13 620052 589196       0 0.99992 0.99986
14 618720 589222       0  0.9999 0.99982
15 632362 601812 0.00038 0.99988 0.99977
16 653268 619808 0.00131 0.99986 0.99972
17 675064 638398 0.00371 0.99983 0.99965
18 696653 660443 0.00662 0.99979 0.99957
```

```
19 716083 674489 0.01297 0.99976  0.9995
```

出生率と死亡率を固定すると単純なループになる。途中で出生率や死亡率を変化させる場合はスクリプトのループの年次の区切りでレスリー行列の出生率のデータを仮想データと入れ替えればよい。

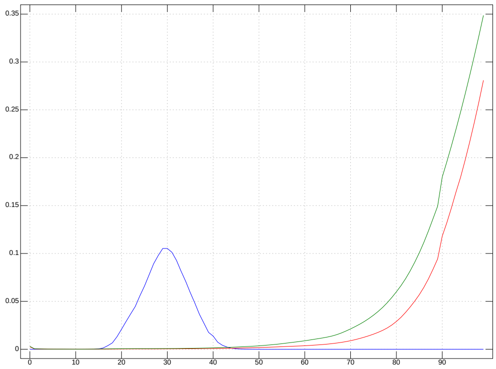


図 3　出生率と死亡率

男女の出生率の差は 105:100 で固定している。概ね 106:100 との間で推移している。

男女のマトリクスは次のような構成になり、出生数を男女比率に応じ配分する。

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 \\ F & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

4.1　計算結果

```
'key T F M' plot ;("1) +/("1) (L:0)  200 leslie_human_loop  }."1 DAT
  pd 'eps /temp/japan_leslie.eps'
```

Year	Total	Female	Male
2010	1.27161e8	6.52645e7	6.18966e7
2015	1.25582e8	6.45989e7	6.09828e7
2020	1.22538e8	6.31952e7	5.93423e7
2025	1.18371e8	6.12089e7	5.71621e7
2030	1.1348e8	5.88239e7	5.46563e7
2035	1.08142e8	5.61651e7	5.1977e7
2040	1.02537e8	5.33113e7	4.92259e7
2045	9.68232e7	5.03583e7	4.64649e7
2050	9.11585e7	4.74524e7	4.37062e7
2055	8.54995e7	4.4596e7	4.09035e7
2060	7.97732e7	4.16953e7	3.80779e7
2065	7.40868e7	3.87469e7	3.53399e7
2070	6.86995e7	3.58917e7	3.28078e7
2075	6.3796e7	3.3285e7	3.05111e7
2080	5.93392e7	3.09438e7	2.83955e7
2085	5.5216e7	2.88043e7	2.64118e7
2090	5.134e7	2.6802e7	2.4538e7
2095	4.76855e7	2.49053e7	2.27803e7
2100	4.42735e7	2.31201e7	2.11535e7
2105	4.11217e7	2.14626e7	1.96591e7

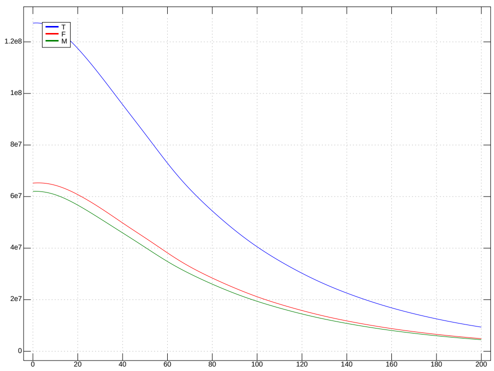


図 4　日本の人口推移 (200 年)

■**人口の最近の話題**　,

(Economist July 2008)

韓国	出生率は日本より低い。医者などが超音波などでの胎児の性別を出世以前に告げることは法律で禁止されている。
ロシア	男性の平均寿命が 80 年代の 62 才から 57．4 才まで下がった。1993 年から人口減少が始まった。ソ連崩壊の混乱で特殊合計出生率は 1.2 程度に下がった。二人目を出生すれば 25 万ルーブル（年収の 2 年分程度）の手当てが支給される
中国	1980 年から始まった一人っ子政策が人口爆発を押さえた。一人っ子を宣言すると 14 才まで奨励金を出し、宣言せず実施しなかった場合は罰金を徴収する。特殊合計出生率を現状維持の 2.1 程度に安定させる方向である。男女の構成比率は 1.22 と極端に偏っている。
東欧	特殊合計出生率 1．3
インド	死亡率の大幅減少が人口増加 (2 低下し始めている。特殊合計出生率は 71 年の 4.1% から 03 年には 3 まで低下した。地域格差が大きく 1．6 から 4.51 まで広がるが教育熱から夫婦が望むこどもの数は減少傾向にある。

$(NYTimes22/July/2008)$	2008	2050	$PercentageChange(\%)$
$World$	6750	9191	+36
$Asia$	3872	4909	+27
$SubSaharan\ Africa$	827	1761	+113
$Middle\ East\ and\ Northern\ Africa$	364	595	+63
$Oceania$	35	49	+41
$Latin\ America$	579	769	+33
$Northern\ America$	342	445	+30
$Europe$	731	664	−9

4.2　Script

```
   leslie_loop=:4 : 0
NB. markov chain
NB. Usage: e.g. leslie_loop  RACCOON/ POP;Fx;Px
NB. x is 10;0 //(times to loop); select 0/1
NB. 0 is birth rate of F   --> birth // 1 is M+F-->  bitrh * 1r2
NB. y is 3 factors
NB. Population; f(birth-rate);p(alive-rate)
'POP F0 P0'=.{|: y
if. 2= # x do.'TIME SEL'=. x else. 'TIME SEL'=. x; 1  end.
```

```
P0=. }: P0
MAT=. F0, (P0 *=i. # P0),. 0 NB. make Leslie matrix
ANS=. < POP
for_ctr. i. TIME do.
POP=. MAT +/ . * POP
  if. 1= * SEL do. POP=. birth_half POP end.
ANS=.ANS,<POP
end.
TMP=:;("1),. ANS
(i.>: TIME),. TMP,. +/"1 TMP
)

leslie_mat0=: 3 : 0
'F0 P0' =.  y NB. Fx;Px
F0, (P0 *=i. # P0),. 0 NB. make Leslie matrix
)

birth_half=: 3 : 0
(-: {. y) , }. y NB. rate of f,m is 0.5:0.5
)
```

5 Reference

Brain Bradie [numerical Analysys] Pearson 2006

平下幸男「数理科学のレッスン」産業図書 1992