目次

エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その５
−キャッシュオンデリバリーオプションの価格式−

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models − 5 −

The Cash on Derivery Option Pricing Model

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

１．はじめに

キャッシュオンデリバリーオプションとは、オプション購入時にプレミアム支払う必要がなく、オプション満期に得をしたときにのみプレミアムを支払えばよいオプションである。従って損をしたときは何の負担もないので、得をしたときのプレミアムは其の分高めに設定される。例えば、変動金利で資金を調達している会社があるとする。将来、低い確率ではあるが金利がかなり上昇し 4% を超えるかも知れないようなとき、その可能性のために高いプレミアムを払わねばならないとする。このような状況下で、キャッシュオンデリバリーキャップを購入することを考える。その期間で予想通り 4% 以下であればプレミアム支払うことなく資金調達ができるが、万一 4% を超えた場合には、プレミアムを払って高金利の負担を無くすことができるというキャッシュオンデリバリーオプションキャップを買うことになる。このオプションは本年の１月の研究会で述べたプレインバニラオプション [1] において、得をしたときのみプレミアムを支払うことに相当するオプションである。

２．キャッシュオンデリバリーオプションの評価式

オプション満期 T における行使価格 (ストライク金利に対する負担額) を K としたとき、オプション価格が行使価格 K を上回ったときにのみプレミアム C が生ずるので、キャッシュオンデリバリーオプションのペイオフは以下の図のようになる。

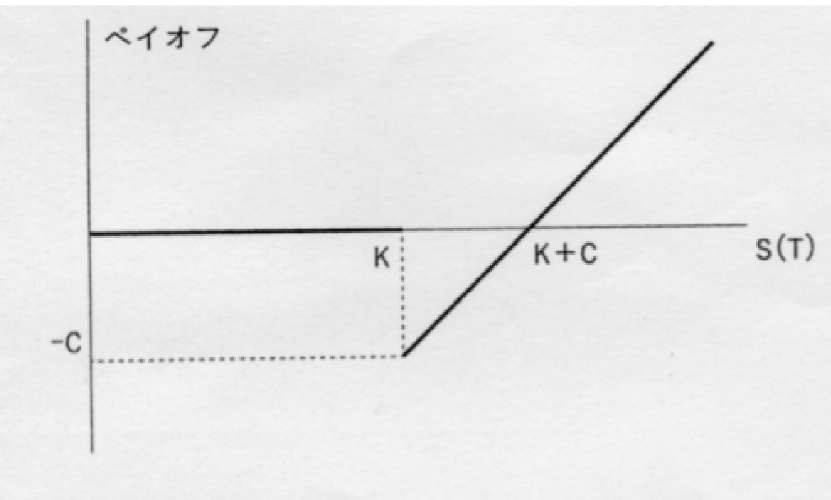

図１．キャッシュオンデリバリーオプションのペイオフ

このペイオフを式で表現すると $Max\{S(T)-K-C,0\}$(ただし、$S(T) \geq K$) の期待値となるが、これは $S(T)$ が行使価格を超えたときのプレインバニラオプション価格から、プレミアム C を引いた価格になっていることが分かる。

オプションの価格 $S(T)$ が幾何ブラウン運動に従い、r をリスクフリーの金利としたとき、その変動が次の式で表わせるならば、

(1) $$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

の仮定のもとで、オプション満期 T におけるこのオプションの価格 $S(T)$ の確率密度関数を $f(S(T))$ とすると、キャッシュオンデリバリーオプションの価格 C^* は、

(2) $$C^* = \int_{-\infty}^{\infty} Max\{S(T)-K-C,0\}f(S(T))dS(T) = \int_{K}^{\infty}\{S(T)-K-C\}f(S(T))dS(T)$$

である。そしてこれを現在価値に直した値もってキャッシュオンデリバリーオプションの評価値 C^* とするのではなく、満期におけるペイオフの値がゼロとなる C をもって評価式といする。すなわち、

(3) $$e^{-r(T-t)}\int_{K}^{\infty}\{S(T)-K-C\}f(S(T))dS(T) = 0$$

を満たす C が正当に評価されたプレミアムであるということができる。

そこで (3) 式を書き直して、

(4) $$e^{-r(T-t)}\int_{K}^{\infty}\{S(T)-K\}f(S(T))dS(T) - e^{-r(T-t)}C\int_{K}^{\infty} f(S(T))dS(T) = C_1 + C_2$$

のように２つの積分に分けると、第１の式はプレインバニラコールオプションと同じなので、

(5) $$C_1 = S(t)\Phi(d+N\sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d)$$

ここで、

(6) $$d = \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、第２の式は同じく以前扱ったデジタルオプションの式 [1] で、A の代わりに C を使った式として計算出来る。

(7) $$C_2 = Ce^{-r(T-t)}\Phi(d)$$

となるので、(6)、(7) を (4) に代入し、C を求めると、

(8) $$C = S(T)e^{r(T-t)}\frac{\Phi(d+N\sigma\sqrt{T-t})}{\Phi(d)} - K$$

このようにプレミアムを求めることが出来る。

３．プレミアム確定後の評価

プレミアム C が確定し、売り手と買い手が合意した後のキャッシュオンデリバリーオプションの評価をしてみる。満期でのペイオフは $Max\{S(T)-K-C,0\}$(ただし、$S(T) \geq K$) であるから、これは正に K を $K+C$ で置き換えたプレインバニラコールオプションの評価式が使えて、(8) で確定した C を用いて

(9) $$V = S(t)\Phi(d+N\sigma\sqrt{T-t}) - (K+C)e^{-r(T-t)}\Phi(d)$$

ここでも d は (6) で与えられるブラック・ショールズではお馴染みの値である。

この V を S の変化に応じてどう変化するか、図示したのが次の図である。

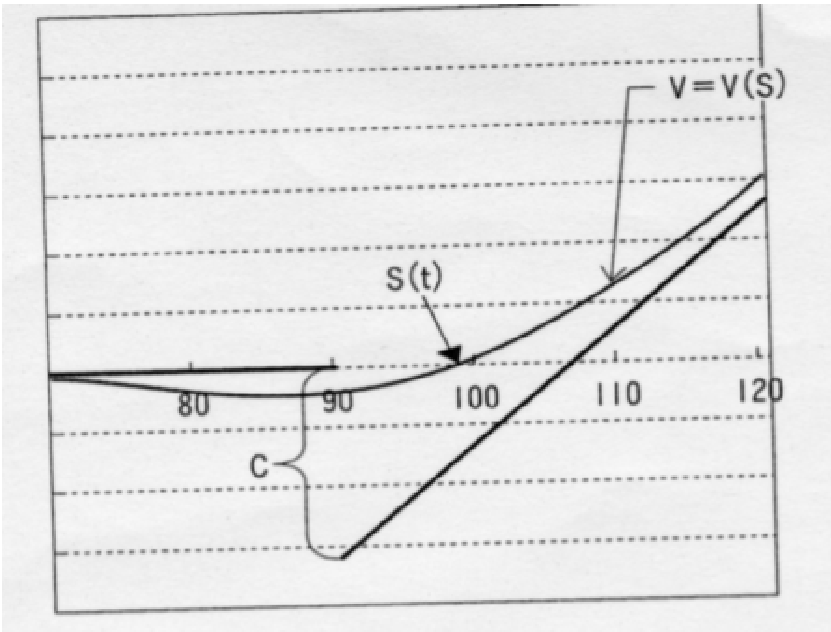

図２．キャッシュオンデリバリーオプションの価値の変化

K=90 をストライク価格としたので、ペイオフ直線はそこで切れている。また、現在価格を S(t) としているので、C の決め方から分かるようにそこで V=0 となっている。

４．キャッシュオンデリバリーオプションの J プログラム

これからは日本語表示が可能な J601 バージョンで関数を作成することにする。大きな違いはこれまでの J では左右の引数を x. y. を用いていたが、601 以降はピリオドを使わず、左右の引数は x y を用いるようになったのに注意して欲しい。

```
NB. ==========================================
NB. Normal Distribution : High Precision
NB. Ndist(u)=NP(u>0)=Phi(u)=1-NQ(u>0)
NB. ==========================================
stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
NB. When u>0 is small
NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
NB. When u>0 is large
NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%‘+/1,,y ,.>:i.28
)
NB. Standard Normal Distribution Function Phi(u)
```

```
Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. ==========================================
NB. Cash on Derivery Option Model(to Obtain C)
NB. J.Takeuchi  Jun. 2007
NB. ussage: Cash_D data
NB. data is list ( 5 elements)
NB. AssetPrice StrikePrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=.100 90 2 10 10
NB. ==========================================
Cash_on =: 3 : 0
'S K T V R'=. y
t=. T % 12
u=. (^. S % K) + t* (r=.R % 100) - -:(vol=.V % 100) ^2
d=. u % (vol * %: t)
d2=. d + vol * %: t
p1=. Ndist d2
p2=. Ndist d
C=. ((S*^r*t)*(p1%p2))-K
)
NB. ==========================================
NB. Cash on Derivery Option Value Curve
NB. J.Takeuchi  Jun. 2007
NB. ussage: VV data
NB. data is list ( 6 elements)
NB. AssetPrice StrikePrice C Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=.100 90 21.0654 10 10
NB. ==========================================
   VV=:3 : 0
'S K C T V R'=. y
t=. T % 12
u=. (^. S % K) + t* (r=.R % 100) - -:(vol=.V % 100) ^2
d=. u % (vol * %: t)
d2=. d + vol * %: t
p1=. Ndist d2
p2=. Ndist d
VV=. (S*p1)-(K+C)*p2*^-r*t
)
```

●使用例

現在時の価格を 100 円、ストライク価格を 90 円、期間は 12 ヶ月、ボラティリティを 10%、フリーレートを 7% としたときのプレミアムを求める。

```
   Cash_on 100 90 12 10 7
18.2137
```

次にこのプレミアムを用いてキャッシュオンデリバリーコールオプションの価値を求める。

```
   VV 100 90 18.2137 12 10 7
4.14385e_6
```

100 円ではゼロになる。
ここで、オプション価格曲線がどうなっているかを調べてみる。
70 円以下ではほぼゼロ、90 円付近で最大のマイナス、あとは 100 円を超えると上昇曲線を描いてどんどん高くなってゆく。図２．が確認されたといえる。

```
   VV 70 90 18.2137 12 10 7
_0.424463
   VV 80 90 18.2137 12 10 7
_3.39813
   VV 90 90 18.2137 12 10 7
_5.27815
   VV 100 90 18.2137 12 10 7
4.14385e_6
   VV 110 90 18.2137 12 10 7
9.17917
   VV 120 90 18.2137 12 10 7
19.1062
```

【参考文献】

【1】竹内寿一郎・本田皓士（2006）：エキゾチックオプション価格のシミュレーション　その１　ーキャッシュデジタルとプレインバニラオプションー　JAPLA 2006 シンポジウム　2006.12.9 資料

【2】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　ー基礎理論と専門書のブリッジテキストー　金融財政事情研究会