

「三角形の内点から三辺に下ろした垂線の長さの積を最大にする点 が重心に一致する」ことの数値計算的証明

帝京平成大学 鈴木義一郎

gpoint=:3 : 'a+2r3*(-:b+c)-a[' ' a b c ' '= . y . '			
「gpoint」は3点を複素数で与えた三角形の重心の点(複素数)を出力する関数である。			
d1=:0;2j2;3	d2=:1;3j2;4	d3=:0j1;2j3;3j1	d4=:1j1;3j3;4j1
gpoint d1	gpoint d2	gpoint d3	gpoint d4
1.66667j0.666667	2.66667j0.666667	1.66667j1.66667	2.66667j1.66667

line=:3 : '({:b)-t*{.b}j.t=%~/-/a,:b [' ' a b ' '= . + . & . > y . '				
「line」は複素数で与えた2点を通る直線(実数部が切片で虚数部が勾配)を出力する。				
d=:0;6j6;9	gpoint	line	line	line 9;0
5 2	0j1	0;6j6	6j6;9	0
length=:4 :0 (' a b ' '= . + . x .); ' p q ' '= . + . y . t=. (a+b*p+b*q)%1+*:b { . * . ((s=. (t-a)%b) j . t) - y . if . x . =0 do . t . { : + . y . else . t end .)]a=:0j1 length 5j2 2.12132]b=:18j_2 length 5j2 2.68328]c=:0 length 5j2 2		a*b*c 11.3842 「length」は右引数で与えた点から左引数で与えた直線へ下ろした垂線の長さを出力する
point=:4 :0 (' a b ' '= . + . x .); ' p q ' '= . + . y . t=. ((s-a)%b) j . s=. (a+b*p+b*q)%1+*:b if . x . =0 do . t . { : + . y . else . t end .)		0j1 point 5j2 3.5j3.5 18j_2 point 5j2 7.4j3.2 0 point 5j2 5		「point」は右引数で与えた点から左引数で与えた直線へ下ろした垂線の足の座標(複素数)を出力する関数である。
product=:3 :0 d=. (a=. 0) ; (b=. 6j6) ; c=. 9 s=. ((2=+/"1 t)#t#. #:i.7)#d		product 5j2 11.3842 product 5j2.1		三角形の座標を d=:0;6j6;9 に固定して、右引数の複素数 で与えた点から三辺へ下ろ

<pre>' p q r'=. line "1 s z=. p(length=. [:{. [:* point-])y. z*(q length y.)*r length y.)</pre>	<pre>11. 3624 product 5. 1j2 11. 3716</pre>	<p>した垂線の長さの積を出力する関数が「product」である。</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------	---------------------------------------

<pre>coef=:3 :0 c=. (+. line 2{. y.), :+. line _2{. y. ((-&{., 1:)%{:)"_1 c) range=:coef@[p. [maxp=:4 :0 'a b'=. x. range y. z=. (a+(i. 101)*(b-a)%100)j. "0 x. (([]=>. /)p=. product"0 z)#z)</pre>	<p>「coef」は三角形の「0j1」、「18j_2」を x について解いた直線の切片と勾配を出力する。</p> <p>「range」は虚数部を左引数で与えて、三角形(d=:0;6j6;9)内の実数部の範囲を出力する。</p> <p>「maxp」は「d」点から三辺へ下ろした垂線の長さの積を最大にする点の座標を出力する。</p>
<pre>coef d 0 1&p. 3 9 _0.5&p. 3 3 range d 3 maxp d 0 1 3 7.5 3 7.5 5.25j3 9 0.5</pre>	<pre>max=:3 :0 a=. -:(>. /a)-<. /a=. {:"1+. &>y. a=. (a%1000)*i. k=. 1001+#z=. '' while.k>1 do. z=. z, ((k=. <:k) {a)maxp y. end. ((=>. /)p=. product"0 z)#z)</pre>
<pre>max d product 5.00025j2.001 5.00025j2.001 11.3842</pre>	<p>「max」は三角形(d=:0;6j6;9)の三辺へ下ろした垂線の長さの積を最大にする点の座標を出力。刻みをもっと細かくすれば、正確な重心(5j2)に一致するようになる。</p>

<p>【7点一致の物語り】 任意の四角形ABCDに対して、次の7つの点が全て一致する。</p> <p>① 辺ABの中点と辺CDの中点を結ぶ線分の中点：P1</p> <p>② 辺BCの中点と辺DAの中点を結ぶ線分の中点：P2</p> <p>③ 対角線ACの中点と対角線BDの中点を結ぶ線分の中点：P3</p> <p>④ 三角形ABDの重心と頂点Cとを結ぶ線分を1：3に分ける点：P4</p> <p>⑤ 三角形ABCの重心と頂点Dとを結ぶ線分を1：3に分ける点：P5</p> <p>⑥ 三角形BCDの重心と頂点Aとを結ぶ線分を1：3に分ける点：P4</p> <p>⑦ 三角形ACDの重心と頂点Cとを結ぶ線分を1：3に分ける点：P5</p>	<pre>' A B C D'=:4j8;6j6;8;0</pre> <p>四角形ABCDを複素数値で与える。</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------

midp=:[: -:[:+ />]P1=:midp(midp A;B);midp C;D
]P2=:midp(midp B;C);midp D;A]P3=:midp(midp A;C);midp B;D
]P4=:+/(3r4 1r4)*(gpoint A;B;D),C]P5=:+/(3r4 1r4)*(gpoint A;B;C),D
]P6=:+/(3r4 1r4)*(gpoint B;C;D),A]P7=:+/(3r4 1r4)*(gpoint A;C;D),B