反復計算ををタシットで

M.Shimura
JCD02773@nifty.ne.jp

2007 年 10 月 25 日

目次

1 **金利計算** 1

2 **フィボナッチ数** 3

3 **ロジスティックス関数** 4
3.1 Script 4

4 **マルコフ連鎖** 5
4.1 Script 5

5 **ニュートン法** 6

6 Reference 6

概要

夏の緑に囲まれた蓼科の山荘での研究会で、タシットの簡易反復法で描かれ、ホワイトボードに投影されるフラクタルの樹影とその簡潔なスクリプトの美しさに見とれていた。
（帰ったらやってみよう。）

1 金利計算

例題	年利 10% の利息で 1000 ドルを預ける。この金を n 年間ふれないで放置したとすると、満期後には口座残高は幾らになっているだろうか（10% の利息は各年の年度末に口座に加えられるものとする）	[1] p.10

1.0.1

$F(x) = 1.1x$ と定義する

$A_1 = F(A_0)$

$A_2 = F(A_1)$

$A_3 = F(A_2)$

$A_2 = F((F(A_0)) = F \circ F(A_0)$

$A_3 = F(F((F(A_0))) = F \circ F \circ F(A_0)$

$F(x) = 1.1x$ より

$F(F(x)) = (1.1)^2 x$

$F(F(F(x))) = (1.1)^3 x$

関数をn回反復すると $F \circ \cdots \circ F(x) = (1.1)^n x$　となる。

1.0.2　SCRIPT

```
fr=: ] * >:@[
```

`^:2` や `^:50` は 2 回、50 回の反復

```
  0.1 fr ^:(2) 1000     NB.2 年後
1210                   NB.1210$

  0.1 fr ^:(50) 1000   NB. 50 年後
117391                 NB.117391$
```

`^:i.11` は 0 回から 10 回の反復を行う。

```
(i.11),.  0.1 fr ^:(i.11) 1000
 0    1000
 1    1100
 2    1210
 3    1331
 4  1464.1
 5 1610.51
 6 1771.56
 7 1948.72
 8 2143.59
 9 2357.95
10 2593.74
```

1.0.3 応用

通常 2 重ループをかけるところを、見出しまで付けて、一行で書いてみよう

```
  0.01 0.03 0.05 0.1 fr ^:(i.11) 1000

(0 0.01 0.03 0.05 0.1),(>:i.10),.(0.01 0.03 0.05 0.1) fr ^:(>:i.10) 1000

 0    0.01    0.03    0.05     0.1   NB. r
-----------------------------------
 1    1010    1030    1050    1100
 2  1020.1  1060.9  1102.5    1210
 3  1030.3 1092.73 1157.63    1331
 4  1040.6 1125.51 1215.51  1464.1
 5 1051.01 1159.27 1276.28 1610.51
 6 1061.52 1194.05  1340.1 1771.56
 7 1072.14 1229.87  1407.1 1948.72
 8 1082.86 1266.77 1477.46 2143.59
 9 1093.69 1304.77 1551.33 2357.95
10 1104.62 1343.92 1628.89 2593.74
```

2 フィボナッチ数

1 1 2 3 5 8 13 21 34

2 3 5 8 13 21 34 55

```
   fb=: (] , [: +/ _2&{.@])

   fb (^:10)1  2
1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233
```

黄金比はフィボナッチ数列からも作ることができる。

```
NB.m= 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233
NB.n= 1 2 3 5  8 13 21 34 55  89 144
NB. m/n

 gr=: 3 : '(i.>: y),.%/}:("1) 1 0 |."0 1(fb (^:y)1 2),: fb(^:y)1 2'


   gr 10
 0       2
 1     1.5
```

```
 2 1.66667
 3     1.6
 4   1.625
 5 1.61538
 6 1.61905
 7 1.61765
 8 1.61818
 9 1.61798
10 1.61806
```

3　ロジスティックス関数

ロジスティック関数はブラッセル生まれのピエール・フランソア・ベルハスト (1804-1849) が 1838 年に人口論の論文で用いたのが最初とされるが、完全に忘れ去られた。1920 年にパールとリードの USA の人口増加についての論文でロジスティック関数を用い、1 年後にベルファストの業績に言及したときに再発見された。(山口昌哉)

人口や生物の増殖から始まり、広範囲に用いられている。また、この式が本格的なカオスを生じることでも知られている。

$f(x) = cx(1 - x_n)$

$x_{n+1} = cn_x(1 - x_n)$　$NB.$漸加式

パラメータ　c

初期値 x_0

3.1　Script

```
fl=: [ * ] * 1: - ]

'point' plot (steps 0 4 1000); (steps 0 4 1000) fl ^:(100+i.100) 0.5
 pd 'eps temp/logis_n0.eps'

 3.2 fl ^:(i.10) 0.5
0.5 0.8 0.512 0.799539 0.512884 0.799469 0.513019 0.799458 0.51304 0.799456
```

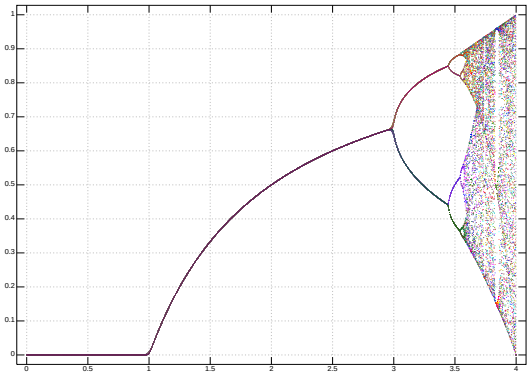

図 1　logistic の軌道図

4　マルコフ連鎖

例題	ビールの銘柄 $S = A, B, C, D$ 消費者が今回買うビールは前回の銘柄には影響されるが、それ以前に買った銘柄とは無関係とする。推移確率 P が次で与えられているとすると、 DAT1 A　B　C　D 0.9 0.05 0.03 0.02 A 0.1 0.8 0.05 0.05 B 0.08 0.1 0.8 0.02 C 0.1 0.1 0.1 0.7 D	

消費者の好み (推移確率) が変わらなければ、シェアは次で固定される。
足下を固めるには、確保した顧客への満足度を高めること (対角行列を大きくする）が大切である。

```
  fp ^:(5) DAT1
0.482701 0.252716 0.178428 0.0861552
0.481714 0.253181 0.178836 0.0862687
0.481434 0.253289 0.178994 0.0862833
0.481629 0.253204 0.178898 0.0862697
```

```
  fp ^:(10) DAT1
0.482133 0.252978 0.178673 0.0862167
0.482133 0.252978 0.178673 0.0862167
0.482133 0.252978 0.178673 0.0862167
0.482133 0.252978 0.178673 0.0862167
```

4.1　Script

普通の内積計算である。

```
fp=. ] +/ . * ]
```

5　ニュートン法

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)}$$

ニュートンの反復関数 $N(x) = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$

```
NB. Newton method
 new_1=: 1 : ' ] - x % x D.1' (^:_)("0)  NB. 収束するまで反復
 new_2=: 1 : ' ] - x (%.|:)x D.1'  (^:17) ("1) NB. 連立方程式用
```

固定点は関数のグラフと直線 $y = x$ の交点を求めることで見いだすことができる。
$sinx$ の固定点を連立ニュートン法で求める。

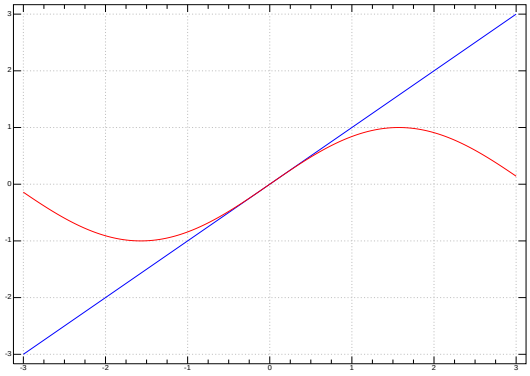

図 2　$sin(x)$ の固定点

```
h1=: 3 : '1&o. {. y'   NB. y=sin x

d0=: 0 1&p.            NB. y=x

   (h1,d0) new_2 1
7.76412e_148           NB. 0
```

6　Reference

[1] R.L. デバニー/上江列 · 重本 · 久保 · 田崎訳「カオス力学系の基礎」ピアソン · エデュケーション 2007（新装版）

[2]　西川利男「双方向グラフィックスによるカオス · ダイナミックス」J 研究会資料　2003/12

[3]　西川利男「双方向グラフィックス (II) マンデルブロート図にフラクタルの実際を見る」J 研究会資料

2004/1

[4] 山口昌哉「カオスとフラクタル（非線形の不思議）」1986　講談社ブルーバックス