数値計算アラカルト

Masato SHIMURA
jcd02773@nifty.ne.jp

2007 年 11 月 26 日

目次

1 ゲーム理論をシンプレックス法で解く

`system/package/math/`に H.Rich 作の *gamesolver.ijs* が入っている。H.Rich が数値計算のバイブル *numericrecipe* を参照して作ったというシンプレックスの解法 *simplexnr.ijs* を用いた本格的なものである。

```
load '~system\packages\math\gamesolver.ijs'
```

1.1 シンプレックス法で解く

```
   solvegame 2 2 $ 20 _30 _10 20
+-----------+-----------+----+
|0.375 0.625|0.625 0.375|1.25|
+-----------+-----------+----+
```

混合戦略で BLUE は T を 37%、H を 62% 選択する。

添付の例題:J.D.Williams 作:コインゲーム
プレーヤー: 青/赤
ルール:2 枚のコインを投げて、一致する、異なるで得るドルの額。BLUE が少し異なるルールを提案をし、受け入れられた。
BLUE が裏 ($Tail$) を出したとき（上段）。RED が表 ($Head$) を出せば RED が 30 ドル受け取り、RED が裏を出せば BLUE が 20 ドル受け取る。BLUE が表 ($Head$) を出したとき（下段)。
BLUE は　20,20 で RED は 30,10 となる。

		RED	
	\	*T*	*H*
BLUE	*T*	20	−30
	H	−10	20

■*BLUE*

```
   a
 20 _30
_10  20
```

$|Max| = -30$

```
   0<.<./,a
_30
```

$a - Max$

```
m1=. a-  0<. <./ ,a
50  0
20 50

NB.matrix for simplexnr

   (2$1);m1;(2$1);2$_1
+---+-----+---+-----+
|1 1|50  0|1 1|_1 _1|
|   |20 50|   |     |
+---+-----+---+-----+
```

■*RED*

```
 0<.<./ , -a  NB. -a
_20

m2=.(|: -a) - 0<.<./ , -a
```

$$maximize : x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{llcl} 50x_1 & & \leq & 1 \\ 20x_1 & +50x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

```
simplexnr   (2$1);m1;(2$1);2$_1
+-+-----------+-----+
|0|0.02 0.012|0.032|
+-+-----------+-----+

 (% +/); 1{ simplexnr   (2$1);m1;(2$1);2$_1
0.625 0.375
```

```
 0 30
50  0
```

RED

```
simplexnr   (2$1);m2;(2$1);2$_1
+-+--------------+---------+
|0|0.02 0.0333333|0.0533333|
+-+--------------+---------+
```

$$\begin{array}{llcl} & 30x_2 & \leq & 1 \\ 50x_1 & & \leq & 1 \end{array}$$

```
+/ ;1{ simplexnr   (2$1);m2;(2$1);2$_1
0.02 0.0333333

 (% +/) ;1{ simplexnr   (2$1);m2;(2$1);2$_1
0.0533333

 (% +/) ;1{ simplexnr   (2$1);m2;(2$1);2$_1
0.375 0.625
```

1.2　H.Rich の simplexnr

H.Rich の *simplexnr.ijs* の解法は強力である。入力マトリクスは、4 の区分に分かれる。添付の例題を再現した。

Maximize $x_1 + x_2 + 3x_3 - 0.5x_4$

NB. subject to

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +2x_3 & & \leq & 740 \\ & 2x_2 & & -7x_4 & \leq & 0 \\ & x_2 & -x_3 & +2x_4 & \geq & 0.5 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 9 \end{array}$$

```
]a=. 1 1 3 _0.5 ; (1 0 2 0 , 0 2 0 _7 , 0 1 _1 2 ,: 1 1 1 1) ; 740 0 0.5 9 ; _1 _1 1 0
+----------+---------+----------+---------+
|1 1 3 _0.5|1 0  2  0|740 0 0.5 9|_1 _1 1 0|
```

```
|          |0 2  0 _7|          |         |
|          |0 1 _1  2|          |         |
|          |1 1  1  1|          |         |
+----------+---------+----------+---------+
```

```
 simplexnr a
+-+-----------------+------+
|0|0 3.325 4.725 0.95|17.025|
+-+-----------------+------+
```

1.3　混合戦略のアラ · メゾン解法

中は連立方程式の係数。右はクラメール法で解いた解で、単位行列はクラメール法で巧く解けた左証、右端の列が解

```
   mix_2s 20 _30 _10 20
+-------+--------+---------+
| 20 _30| 0 80 50|1 0 0.375|
|_10  20|80  0 30|0 1 0.625|
+-------+--------+---------+
```

1.3.1　Script

```
   mix_2s=:3 : '(2 2 $ y.);MAT; {:"1 mix_2_sub y.'

   mix_2_sub=:3 : 0
TMP_XY=: y.
TMP_X=: 1 3 {y.
TMP_Y=: 2 3 {y.
MAT=:  0,(i_salas TMP_XY),(--/ TMP_X)
MAT=:2 3 $  MAT,(i_salas TMP_XY),0, --/ TMP_Y
(2 2 $ y.);   MAT ;cr MAT
)

   i_salas=:3 : '-/ . + 2 2 $ y.'
```

NB. cr cramer method `cr=. %.}:"1`

2　確率微分方程式

2.1　ウイーナー過程

Δt	ウインナー過程に従う変数を z とする 微少時間 Δt での z の変化を Δt とする $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ ϵ は標準正規分布からのランダム・サンプリングとする[*1]	標準正規分布：平均 0，標準偏差 1 の正規分布 ϵ は標準偏差 1，平均 0 であるので ϵ に Δt をかけたものの平方根 ($\sqrt{}$) であるので、Δt も平均 0，標準偏差 $\sqrt{\Delta t}$ の正規分布になる。そして、Δt の値は独立でマルコフ性をもつ。

2.2　ブラウン運動

ランダムウオークは平均 0、分散 Δt の正規分布 $N(0, \sqrt{\Delta t}^2$ に従う。

川辺で揺れる葦のそよぎを時間を加えてプロットすると、風の強さでビュと揺れたりソヨと揺れたりする。

ランダム・ウオークでは一歩の歩幅は同じと仮定するので

ランダム・ウオークで急激な変化はできない。0 戦が B29 を迎撃できる高度に達するのに 1 時間ほどかかったと言われる。

時間を微少にしたブラウン運動では制約は弱められるか。

ブラウン運動は平均 0、分散は t である。

幾何ブラウン運動モデル	$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z$	S：　株価 ΔS：　微少時間 Δt での株価変動 μS：　ドリフト率（トレンド） σ：　株価の標準偏差 Δz：　ウイーナ過程に従う変数

2.3 伊藤のレンマ

ブラウン運動の確率微分方程式	変数 x は $dx = adt + bdz$ に従う	dz： ウイーナ過程 a, b： 変数 x と時間 t の関数
伊藤のレンマ	変数 x と時間 t の関数 G は $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz$ に従う	
株価の対数の過程	株価を $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$ とすると $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\,dz$ となる。さらに $dG = \left(\frac{1}{S}\mu S - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{1}{S}\sigma S\,dz$ $= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz$	$G = lnS$ $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{S}$ $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{S^2}$ $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$

$dG = lnS_T - lnS$

lnS_T: 将来の株価、lnS:現在の株価

株価（対数）G の変化分 dG はトレンド（ドリフト率）$(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$ と標準偏差が σ であるウイナー過程に従う項の和である。

$\Phi[m, s]$ は平均 m 標準偏差 s の正規分布とすると

$lnS_T - lnS \sim \Phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T - t), \sigma\sqrt{T - t}]$

$lnS_T \sim \Phi(lnS + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}]$

[*2]

将来の株価（対数）$lnS\,T$ は平均 $lnS + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$ 標準偏差 $\sigma\sqrt{T - t}$ の正規分布に従う

[*2] Φ ふぁい

■数値例　　株価 500 円、期待収益率 5%、ボラティリティ 30%

$$lnS_T \sim \Phi[ln500 + (0.05 - \frac{0.3^2}{2}) \times 1$$
$$0.3 \times \sqrt{1}]$$

```
 a=.  (^.500) + (0.05 - -: 0.3^2)* 1
6 .21961

  b=. 0.3 * %: 1
0.3
c1=.  a-b*2
5.63461

  c2=. a+b*2
6.80461
```

$96\% = \pm 1.95$

$6.21961 - 0.3 \times 1.95 < lnSt < 6.21961 + 0.3 \times 1.95$

$5.63461 < lnSt < 6.80461$

$lne^{5.63461} < lnSt < lne^{6.80461}$

$279.94 < St < 901.996$

信頼区間は 280 円と 902 円の中と聞いても嬉しくないかもしれないが!!

```
1x5.63461
279.95

1x6.80461
901.996
```

```
     rd 500 0.05 0.3
279.949 901.994
```

■Script

```
rd=: 3 : 0
NB.rd  500 0.05 0.3
NB. stock price drift volatiliti
'A0 B0 C0'=. y
TMP0=.((^. A0)+B0- -: ^&2 C0) * 1
TMP1=. C0 * %: 1
^ L:0 (TMP0 - C0* 1.95),TMP0+C0*1.95
)
```

3　Reference

H.Rich の J 添付のサンプル

石井至「金融工学入門」日本能率協会マネジメントセンター　2000