

Fourier Series

M.Shimura

JCD02773@nifty.ne.jp

2007年4月23日

目次

1	Fourier regression	1
2	Discrete Fourier Translation	4

1 Fourier regression

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(A_n \cos \frac{2n\pi}{b-a} x + B_n \frac{2n\pi}{b-a} x \right)$$

$$Y = A * \sin(2\pi f t / n) + P = A * \sin(\omega t + P)$$

$$\omega = 2\pi f / n$$

$$A * \sin(\omega t + P) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

$$\text{式 } \hat{Y} = a_0 + b_0 t + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) \cdots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

経過と説明

トレンドを求める ここでは少々特異なトレンドの求め方を用いる。

1. mean of Y_t
2. Mean($Y_t - Y_{t-12}$)

3. $\text{Mean}(Y_t - Y_{t-12})/12 = b_0$
4. (Ending value t + Beginning value t)/2
5. (1)-(3)*(4) = a_0

1. mean of $Y_t = 827.4353$
2. $\text{Mean}(Y_t - Y_{t-12}) = 84.86$
3. $\text{Mean}(Y_t - Y_{t-12})/12 = b_0 = 84.86/12 = 7.07176$
4. (Ending value t + Beginning value t)/2 = (48+1)/2
5. (1)-(3)*(4) = $a_0 = 827.4375 - (84.86/12)*24.5 = 654.179$

find_trend0 DATF

654.179 7.07176

$$T_t = 654.179 + 7.07176t$$

find_trend0=: 3 : 0

B0=.12%~(+/%#) -/"1 (12}. y),. _12}. y NB. bo

A0=.((+/%#) y)-B0*(-:>:#y)

REG=:A0,B0

)

cos sin の係数を求める $1.\omega = 2\pi f/n = 2\pi 1 * 4/48 = 0.5236$

2. $\cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots$ を作成する

3. $Y_t - T_t$ を fourier の係数で回帰する。

$Y_t - T_t$ は Actual からトレンドを除いたもの (Detrend) である。

] OMEGA=. 2p1 *4% 48

0.523599

10{. 4{."1 (4;3) reg_fourier_sub DATF

$\cos(\omega t) \sin(\omega t) \cos(2\omega t) \sin(2\omega t)$

```

0.866025      0.5  0.5      0.866025
  0.5  0.866025 _0.5      0.866025
6.12303e_17      1  _1  1.22461e_16
  _0.5  0.866025 _0.5      _0.866025
 _0.866025      0.5  0.5      _0.866025
  _1  1.22461e_16      1  _2.44921e_16
 _0.866025      _0.5  0.5      0.866025
  _0.5  _0.866025 _0.5      0.866025
_1.83691e_16      _1  _1  3.67382e_16
  0.5  _0.866025 _0.5      _0.866025

```

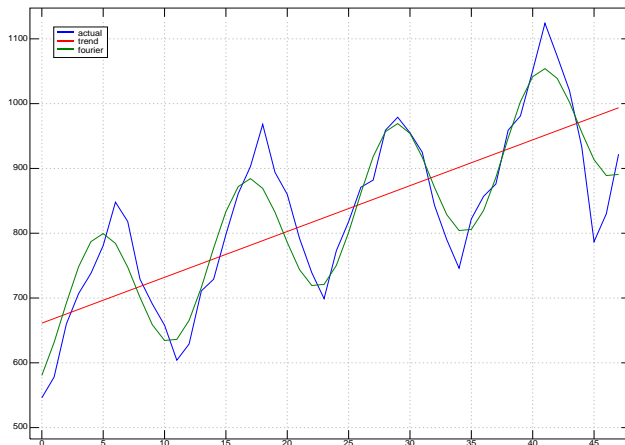


図 1 SERIESF

5 reg_fourier DATF

```

_118.805 _1.29389 6.74074 22.3162 3.01157 _3.63657
4.11574 _1.14935 2.07793 0.622593

```

$$\hat{Y} = -118.805\cos(\omega t) - 1.29389\sin(\omega t) + 6.74074\cos(2\omega t) + 22.3162\sin(2\omega t) + 3.01157\cos(3\omega t) - 3.63657\sin(3\omega t) + 4.11574\cos(4\omega t) \dots$$

推計 トレンド項と Fourier 項を組み合わせ、推計値を求める。

$$\hat{Y} = 654 + 7.0718t - 118.805\cos(\omega t) - 1.29389\sin(\omega t) + 6.74074\cos(2\omega t) + 22.3162\sin(2\omega t) + 3.01157\cos(3\omega t) - 3.63657\sin(3\omega t) + 4.11574\cos(4\omega t) \dots$$

```
(>i.10),. 10{. 5 estim_fourier DATF
```

```
Actual trend seasonal
```

```
1 546 661.251 580.602
2 578 668.323 631.494
3 660 675.395 692.254
4 707 682.466 748.496
5 738 689.538 787.046
6 781 696.61 799.469
7 848 703.682 784.331
8 818 710.753 747.583
9 729 717.825 700.966
10 691 724.897 658.867
```

2 Discrete Fourier Translation

ラフマニノフ (1873-1943) のピアノコンティエルト 2 番八短調は複雑な和音から始まる。幸いにも本人の演奏が S P 盤に残っているらしい。この複雑な和音は楽譜を時間軸で追っていくと複雑なスペクトルをしている。このスペクトルをフーリエ変換すると楽譜に近い単音のスペクトルが現れる。耳のよい人は聞いただけでこの単音分解ができる(?)。

C	B	A	G \sharp	G	F	E	E \flat	D	C
1/2	9/16	3/5	5/8	2/3	3/4	4/5	5/6	8/9	1

離散フーリエ変換の定式

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

そこで

$$W = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

として

$Ax = y$ 型の方程式を解けば求まる。

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^n \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{(N-1)2} & \dots & W^{(N-1)n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}$$

JのLabの中に離散フーリエ変換の次のスクリプトが入っていた。

```
dffft=: 3 : '+/ y * ^ (#y) %~ (- o. 0j2 ) * */~ i.#y'
```

	<pre>*/~i. # a=. >:i. 4 0 0 0 0 0 1 2 3 0 2 4 6 0 3 6 9</pre>
	<pre>((-o. 0j2) * */~i. # a) 0 0 0 0 0 0j_6.28319 0j_12.5664 0j_18.8496 0 0j_12.5664 0j_25.1327 0j_37.6991 0 0j_18.8496 0j_37.6991 0j_56.5487</pre>
	<pre>((-o. 0j2) * */~i. # a)% # a=.>:i.4 0 0 0 0 0 0j_1.5708 0j_3.14159 0j_4.71239 0 0j_3.14159 0j_6.28319 0j_9.42478 0 0j_4.71239 0j_9.42478 0j_14.1372</pre>

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -j & 1 & j & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ j & 1 & -j & 1 \end{bmatrix}$	<pre> ^ ((-o. 0j2) *a */~i. # a)% # a.=.:i.4 1 1 1 1 0j_1 _1 0j1 1 _1 1 _1 1 0j1 _1 0j_1 1 </pre>
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -j & 1 & j & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ j & 1 & -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	<pre> a * ^ ((-o. 0j2) *a */~i. # a)% # a.=.:i.4 1 1 1 1 0j_2 _2 0j2 2 _3 3 _3 3 0j4 _4 0j_4 4 </pre>
<p>Σ</p> <p>DFT</p>	<pre> + / a * ^ ((-o. 0j2) *a */~i. # a)% # a.=.:i.4 _2j2 _2 _2j_2 10 dfft a 10 _2j2 _2 _2j_2 </pre>