Ｊ言語　と　固有値問題　（その５）

ダニレフスキー法　から　ファデーエバ法 そして　固有ベクトルへ

中野嘉弘　（８４才・札幌市）　　山下紀幸　（８２才・横浜市）

FAX 専　011-588-3354　　FAX/TEL -45-851-3721
yoshihiro@river.ocn.ne.jp

今迄の「Ｊ 言語 と 固有値問題」（１～４）の続報として、志村氏による新情報、「ル・ヴェリエ　＆　ファデーエフ法」関連の話題を提供する。

０．　は　し　が　き

大阪の世界陸上の女子マラソンで、土佐礼子選手が熱闘し、輝く銅メダルで全国を沸かせたちょっと前の８月下旬、我がＪＡＰＬＡ・志村氏からチャレンジのＥメール（第１報）が、我らロートルを驚かせた。「固有値ファンへ **John Randall** 氏からの **Script** です。　どうぞ！」（文献１）。　中野は受けて立ち、試行結果の返信メールを送った（文献２）。　さらに、これを老友に転送したところ、早速、横浜の山下からも **FAX** 解答が帰って来た（文献２ａ）。　我らの旧稿　**Naigen** 法との比較も添えて。我らロートルの反応に続いて、志村メール（第２報）は 「昨夜の内に固有値の話題が世界を飛び回っていました。」（文献３）　そして著名な固有値解法の各種と例題が、チャレンジを待つと云う刺激的なものであった。　ＱＲ法については、新旧法を混ぜて与え、回答者の混乱を期待するムードまであった。
その中には **Leverrier-Faddeev** （ル・ヴェリエ、　ファデーエフ）法なる名前があった。　今まで、幻の「ダニレフスキー法」に踊らされて来た中野には、**Leverrier-Faddeev** 法は、極めて、魅力的な名前である。
我らと同じく、与行列の特性（**characteristic**）方程式を作ってから、その固有根を求める解法である。
「ダニレフスキー法」を「幻」と評したのは、その実態が未だに判らないからである。インターネットで検索しても、「ダニ（昆虫の）」、「レフ（写真機の）」、「スキー（冬の）」の結合の感覚での、個別の解説がされる回答の「凄さ」に呆れるばかり。
我々は、詳細不明のまま、手探りで試行錯誤、固有値問題の解法の仮称 **Naigen** 関数を得たのであった。　これは、特性方程式を主対角線要素沿いに余因数展開で得ると云う強引？な方式であった。　展開が余りにも長大なので、９次までが限度であった。
１０次の場合になって、 **iterative** な計算法　**Naigen** が考案され、その後は任意次数でも簡単に展開される事が可能になった。
しかし、人手は激減したが、今度は、余りの内部計算量の為、１１次以上のデータでは普通のパソコンでは処理が無理な事も判った。　とにかく、これを **Naigen** 法と呼び、英国の計算機学会の　**Vector** 誌に投稿すみであるが、その件は、前報（その３）に述べてある。　今までの資料４編は、文献（４－ａ，ｂ，ｃ，ｄ）にある。

さて後者、即ち今回知った　**Leverrier-Faddeev** を検索すれば、簡単に情報が得られる。　先ず、前者の ル・ヴェリエは、１９世紀フランスの数学・天文学者である。天王星の外側の惑星・海王星を軌道計算によって予言したと云われる大学者に該当するらしい。　彼の名は　**Urbain (1811-1877)** 後に、パリの天文台長となった人である。
次なる「ファデーエフ」はロシアの素粒子物理学者で量子群が専門、「ファデーエフ・ポポフのゴースト（お化け）とアンチ・ゴースト」で知られる偉い人である。

そして、彼の名前は、詳しくは、**Ludvig Dmitrievich** 即ち **L.D.** で始まる。
これら御両人の　Ｌ　と　Ｆ　が、正しく本人達に対応するのであれば、大変な事だ！

とにかく、これが本稿の始まりである。

１．　Ｎａｉｇｅｎ法　の　近況

本法の特長は、先ず、行列の特性（**characteristic**）方程式を扱うので固有値問題の厳密解を目指している。
次に、　**iterative** であるため、特性方程式を求めるプログラムが、与行列の次数に無関係となり、簡便である事だ。　３次でも１０次でも同じ事である。

欠点としては、計算に若干、多くの時間を要する事、つまり、遅いらしいのだ。
山下は、次の如く、計時コマンドを追加した。
（註：下記はＪ６版用、原関数 **Naigen** に　**time** 関数　を入れると、**iteration** に支障あり。）

```
      Naigeny =: 3 : 0
        t=:6!:1''
        X=. ny =. # Y =. y
   if. X=2 do. Naigen2 y return. end.
        dety =. det Y
        my=. minorir Y
        Nmy=. (X-1) Naigen each my
        Nmyp =. +/ > Nmy
        c =. Nmyp % (>: i.ny)
     wr  Nans =. (((_1)^ny)*dety), c
        (":(6!:1'')-t),'sec'
     )
```

上記プログラム中、 上下の **time** 関数を取り去ったものが、基本関数　**Naigen** に相当する。
また、**iterative** を力説する為に、わざと 左引数 **(X-1)** を入れてあるが、それを省いた　**monadic** な形にする事も可能である。　計算結果を、他に渡したい時は、末尾の **time** 関数の位置を　**wr Nans** 行と交換する。

計算時間の例は、中野の標準的 ウィンドウズＸＰ マシンで、「特性方程式の全係数が求まるまでの時間」は、与正方行列が　３次まで　**0 sec**、
４次で　**0.01 sec**、　５次で　**0.03 sec**、　６次で　**0.12 sec**、
７次では、その７倍程度の **0.76 sec**、　８次では、その８倍程度の　６　ｓｅｃ、
９次では、その９倍の　５４　ｓｅｃ、　１０次で　５４０　ｓｅｃ が標準例であった。　先ず、１０次で　１０　ｍｉｎ（分）がめどである。

山下の計算機は、やや旧式に類するので、特に、時間が待ち遠しいらしく、最近、しきりに、こぼしている。　１０次の場合、３６　ｈｏｕｒｓ（時間）を要したとも！
そこで、　Ｎａｉｇｅｎ法以前の旧関数　ｅｉｇｅｎ７、８、９　などの改良を努力している。　なかなか難物らしいが、詳細は、いずれ、山下氏の別稿にて。

今回、志村氏のＥメールによって紹介された　ＬＦ（**Leverrier-Faddeev**）法は、極めて迅速であって、殆ど、アット云う間に、事は終わる。　今まで、テストを見合わせて居た

１６次までの、固有値問題があっさり解けて仕舞う。
正直、シャッポを脱がざるを得ない。
８月３１日の中野から志村氏へのＥメールで紹介しよう。（文献３－ａ）

「　とりあえずのテスト情報を送ります。　小生が特に注目したのは **Leverrier-Faddeev** アルゴリズムの関数 **lf (LF)** です。　１０次までの一般行列（非対称、複素数も可）で、我ら日本勢の **Naigen** 或いは、更に **p.** 関数　まで含めた **Peigen** 関数での演算の、殆ど全ての例題で、結果は全く一致しております。　彼もまた、同じく行列の特性方程式による解法を、採用していると推測されるので、当然の一致ですね。嬉しく思います。　ただ、我らは５月以来、何も、しておりませんので、この３ケ月間の、ライバル側の進歩の凄まじさを感じ取っています。　以上」

どんな旨いカラクリがあるのか？　そこで、中野は　ＬＦ法を若干、調べて見た。
その事を以下、紹介しよう。

２．　ファデーエフ法 の背景

この方法の解説は、あまり本には見えぬ。　有名な数学ソフト **Mathematica** の知恵袋せある **Eric W. Weisstein** 著の大冊の数学百科事典”**CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS”** の第１版（**p.1969**）、第２版（**pp.3242**）にも見えない。
岩波数学辞典第４版には、「**Faddeev-Popov** のお化け」の説明はあるが、固有値問題関係は見えぬ。　広中平祐氏らの大著「現代数理科学事典」にも、上記のＦＰゴーストだけが見える（非可換ゲージ場理論）。　こりゃダメじゃ！
最後の頼みとして、インターネットの検索で、やっと、あるサイトに辿り着いた。
http://math.fullerton.edu/matheews/n2003/FaddeevLeverrierMod.html （文献５）
ここまで來れば、しめたもので、和文のサイトも見つかった（文献６）。
その結果では、すでに、単行本に解説が出て居るのだ。　東大あたりの大学者のそれには無いが、若い学者の本には存在した。　ただし、ＬＦの名前は何故か、登場しない。その内容だけが、黙って、一般的な知識として使われている。　少々、首を傾げる？
その結果判った事は、固有値問題に登場するのは、ロシア女性で、**Vera Nikolaevna Faddeeva** で、**Dover** 双書 **" Computational Methods of Linear Algebra(1959)"** の原著者である。（文献７）　従って、本当は女性形の名詞、 **Faddeeva** ファデーエバの方法と呼ぶべきであろうか？
以下の節で、計算の話をする。

３．　ＬＦ法　Ｊｏｈｎ　Ｒａｎｄａｌｌ　流の計算例

志村メール第２報（文献３）から、必要なＪの **Script** を転載させて頂くと、

```
  NB. from J mailing list / programming 27/Aug/2007
  NB.   Leverrier-Faddeev Algorithm
        char =: 3 : 0
   X=.I=.=@i.n=.#y [p=.1
   for _k. >: i.n do.
 X =. y +/ . * X
 p=.p, pk=.-k%~+/(<0 1)|:X
 X=.X+pk*I
   end.
   |.p
 )
```

　　正方行列の特性（**characteristic**）方程式 の 係数が、こんなに簡単求められるとは全く、驚きである。
次に、その根（固有値）を求めるのは、Ｊ言語の **p.** 関数で一発。　これは、Ｊ言語のユーザーならば、誰がやっても簡単で、

```
lf =: >@{:@p.@char
```

関数名は、大文字で書けば、**LF** である。　今後、**LF** 法と略称する。

　　テスト・データには、敢えて **singular matrix A** が用意されていた。
A=:>1 2 3;4 5 6;5 7 9
テスト解は　　**lf A**　より
15.3899 _0.389867 0
このような変則データでは、万能の誉れ高いＱＲ法でも、工夫を加えないと、失敗する **domain error**。　我らの　**Naigen** 法は、勿論、大丈夫であった。

　ただし、それは １０次行列までで、それより高次では、時間がかかり過ぎて、**Naigen** 法では実用性が乏しくなる。

　ＬＦ法では、中野の持つテスト・データの最高次である１６次まで、ゆうゆうと可能であるから、脱帽ものである（１０次までの両者の結果は、勿論、一致しているが）。

４．　ＬＦ法の精神　で　新プログラム

　前節のＬＤ法による　**J. Randall** 氏の固有値プログラム　**char**　のアルゴリズムの解説をするよりは、同巧の判り易いプログラムを作って見せる方が利口かも知れぬ。
　例えば

```
    Feigenp =: 3 : 0     NB.  F  means  Faddeeva, p means  p.
  t=:6!:1 ''
  In =. unitm n =. # A =. y
    i=. 1
  Bi=. A
  pi=. trace Bi
  nans=. 1, -pi
  while. i < n do.
   i=.i+1
 Bi =. (A indot ( Bi - pi*In))
  pi=. (trace Bi) % i
 nans=. nans, -pi
  end.
wr (":(6!:1'') - t), 'sec'
  wr  nans
  >}. p. |. nans
)
```

　　ここで関数　**unitm** は単位行列、**trace** は対角線要素の和、**indot** は行列の内積を求めるものである。　コロンブスの卵！　簡単なものだ。

この関数では、特性方程式の係数と、更に　固有値を印刷するようにした。
　大変、高性能であって、データ行列の次数が３０まで、計算時間は、０．０１ｓｅｃ

以下であった（印刷以前の時間で）。
ただし、次数が３１以上では、方程式の求根関数　ｐ．の方が、ハングして仕舞うので、これが限度となった。　作業を、特性方程式までとその後の求根を分離すべきである。
しかし、それでも駄目らしい。　大型固有値問題は、本法では、この辺が限度か？
（行列式の値を求める計算だけなら、１４３次までは演算可能であるが。）
とにかく、圧倒的な性能であるので、このレベルの議論は終わりにして、固有ベクトルの問題に移ろう。

５．　固有値から固有ベクトル　へ　（Ｃｒａｍｅｒ法）

与行列の固有値とは、同次連立方程式が　**non-trivial** な解を持つ為の条件でもある。　その時実際に、連立方程式の　**non-zero**　な解が固有ベクトルである。
連立方程式の解法に、行列式計算を用いる **Cramers** 法を、先ずトライする。
前段の固有値の求解には、勿論、今回登場の **Randall** 氏のＪ関数　**char** を利用して、関数　**charwvec** を作成した。　その **Script** は、本稿末に纏めてある。

尚、有名な数学ソフト **Mathematica** や **Maple** との演算比較も行った。

例１）　与データ　**p162t1i =. 2 2 $　0 _1 1 0**（文献８　**p.162**　問１**i)**）
Mathematica：　Eigenvectors [{{0,-1},{1,0}}]　の解　**{{-I,1},{I,1}}**
Maple：　eigenvects(p162t1i); の解　**[I,1,{1,-I}]**
Ｊ：　**charwvec p162t1i**　の解
for j=, eigen-vals　&　vectors (normalized)
0　0j1　0.707107　0j0.707107
1　0j_1　0.707107　0j_0.707107

例２）　与データ　**p161r1 =. 2 2 $　1 2 4 _3**　（文献８　**p.161** 例 **1**）
演算　**charwvec p161r1**　から
特性方程式の係数は、昇順に　**_11 2 1**　（左端が最高次項）
固有値は　**_4.4641　2.4641**
固有ベクトルは、 **Cramer**法の行列要素から
5.4641 % 2　->　2.73205
続いて　**_1.4641 % 2　->　_0.73205**　である。
筆算でやれば、それぞれ　**1 ± root 3**　対応である。

例３）　与データ　**p197r1 =. 3 3 $　_10 14 2 _6 9 1 _3 2 1**（文献８ **p.197** 例**1**）
Mathematica：Eigenvalues [{{-10,14, 2},{-6,9,1},{-3,2,1}}]　の解　**{-1,-1,2}**
Eigenvectors の解　**{{2, 1, 2}, {0, 0, 0},{-1, -1, 1}}**
Maple：　[2,1,{[1 1 -1]}],[-1,2,{[1 1/2 1]}]
意味：固有値　**2**　は **1** ケで、固有ベクトルは **[1 1 -1]**
固有値 **-1**　は **2** ケで、固有ベクトルは **[1 1/2 1]**
ジョルダンブロックは　**>jordan(A); [2 0 0**
0 -1 1
0 0 -1]
Ｊ：　**charwvec p197r1**　の解
for j=, eigen-vals　&　vectors (normalized)
0　2　0.57735　_0.57735　0.57735
1　_1　2r3　_1r3　_2r3
2　_1　2r3　_1r3　_2r3
我らのＪ言語での結果の固有ベクトルは、規格化されているが、傾向は納得出来

よう。

例４）　与データ　R（鈴木の 5 X 5 行列）　　　　（文献９　p.132 相関行列）

演算　　charwvec R

結果は上々だが、原著に同じであり、やや長大なので、掲載は省く。

６．　固有値から固有ベクトル　へ　（Ｇａｕｓｓ掃き出し法）

もしも、固有値に等根がある場合には、固有ベクトルの独立性の議論が発生する。等根に対しては、前節の　Cramer法はもの足りないので、連立方程式の解に万能的な「ガウス・・法」を用いる。　その内、周知のガウス掃き出し法を例示する。
forward step で、上三角行列にし、帰りの**backward step** で、対角行列化を目指す。
問題によっては、前半だけで終わっても良い。
関数名　**gauss** を作った。　**Script** は稿末に示す。

例３－ａ）　連立方程式の解の例：　与データ　（第４列目は　定数項）

ip152r1 =. 3 4 $ 5 _1 2 5 _2 4 _1 9 1 _2 6 _10

演算　　**gauss ip152r1**　　から

```
1 0 0 2
0 1 0 3
0 0 1 _1
```

変数項は対角行列化されて、第４列が、連立方程式の解である。

例３－ｂ）　**I34p212 =. 3 5 $ 3 1 3 _2 _2 1 1 3 4 _6 1 2 4 1 _8**

演算　**gauss I34p212**　から

forward step

```
1 0.333333 1 _0.666667 _0.666667
0     1 3     7     _8
0     0 1     5     _3
```

backward step

final

```
1 0 0 _3 2
0 1 0 _8 1
0 0 1  5 _3
```

解　**x1= _3*C + 2, x2 = 8 * C +1, x3 = _5*C - 3, x4 = Const**

７．　固有値　と　固有ベクトル　同時解法

私は、今回の志村メールで　ＬＦ法を始めて知り、他にも今まで言及が見えないので驚いた次第であるが、実は、先の２．節で述べた如く、このＬＦ法を最初に利用した参考書がある。　室淳子・石村貞夫共著の「Ｅｘｃｅｌでやさしく学ぶ行列・行列式」である（文献６－ａ）。　これは良い本だ。　その後段、ｐ．１３４以降に、通常の如く、固有値　と　固有ベクトル　同時解法の解説がある。　ただし、対称行列と、わざわざ断っているのは、何故かよく判らぬが。
とにかく、その論理で、Ｊ言語によるプログラムを作ったので、述べて置こう。
関数名は,**Excel**には何も関係ないが　**exleig** として置いた。　**Script** は　稿末に。

例４）　**C =. 3 3 $ 5 4 _2 4 5 2 _2 2 8**　（文献６－ａ　**p.157** 演習９　問９．３）

va =. 1 0 0　（仮定された演算初期値）

演算　**C exleig va**

結果　　収束値（繰り返し回数　７の後に）

eigen-value = 9

eigen-vector 1 0.8 _0.4

ま　と　め

固有値問題に関して、著者は、幻のダニレフスキー法を追いかけて、、特性方程式による直接解法（仮称　**Naigen**法）を得て居て、英国計算機学会の **VECTOR** 誌に掲載して頂ける予定である。　ところが最近、ル・ブリエ　＆　ファデーエバ（ＬＦ）法　と云う、同じく特性方程式の優秀なる直接解法が、最近、目に入った。
実は、岩波数学辞典等、数学の成書には記載されぬが、数年前から、知る人ぞ知る方法だったらしい。　**Naigen**法との比較の為のテストを行って見た。
優秀なもので、我らも脱帽せざるを得ない。　それだけでは口惜しいので、固有値のみならず、固有ベクトルまで、その利用例を、作成し、御参考に供したい。
陸上や柔道など、スポーツだけでなく、世の中、いろいろ張り切る材料はあるものです！
ただし、目下の本稿は、速報的なものであると理解されたい。 従って、固有ベクトル関係の中野プログラムの掲載は次報以下に譲る。

文　献

１）志村正人（**M.Shimura**）：**(SHIMURA) Eigen Values**
<jcd02773@nifty.ne.jp> 2007.Aug.27. 11:37
NB. John Randall QR=:128!:0 A=:33 16 72,_24 _10 _57,:_8 _4 _17
NB. using in JAPLA (<0 1)& |: eval ^:100 A

２）中野嘉弘 **Re:**中野**(SHIMU) Eigen Values** 折角ですから、やって見ました。
－ａ）山下紀幸 **FAX ('07.8.28,11:47)**：　解は　**200 eval A** より　**3 2 1**、
固有方程式の係数は　**cfr 200 eval A** 又は　**3 Naigen A** より **_6 11 _6 1**。　　３）

志村正人（**M.Shimura**）：**<jcd02773@nifty.ne.jp> 2007.Aug.28.9:59**
from J mailing list/27/Aug/2007 NB. LAPACK, NB. Iterative QR algorithm,
(by Roger Hui, by M.Shimura), NB. Leverrier-Faddeev Algorithm etc
－ａ）中野嘉弘 **Re:**中野最新情報（**SHIMU Eigen**）「取りあえずのテスト情報・・・・」

４－ａ）中野嘉弘：「Ｊ言語と高等数学　固有値問題直接法」**JAPLA** 報告 **2007.4.2**、 **pp.9**
－ｂ）中野嘉弘：「Ｊ言語と固有値問題（その２）直接法の発展」**JAPLA** 報告 **2007.5.26**、 **pp.13**
－ｃ）中野嘉弘：「Ｊ言語と固有値問題（その３）**VECTOR**誌投稿原稿」**JAPLA** 報告 **'07.6.23**、 **PP.3**
－ｄ）中野嘉弘：「Ｊ言語と固有値問題（その４）チュートリアル等　**LAPACK** まで」**JAPLA** 報告 **'07.6.23**、 **PP.9**

５）**http://math.fullerton.edu/matheews/n2003/FaddeevLeverrierMod.html**

６）Ｙａｈｏｏ知恵袋「行列固有値　ファデーエフ・ルヴェリ・アルゴリズムの解説」
質問日時：**2004/12/26/ 21:27:25**　回答日時：**2004/12/27 19:10:07**
http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q122167817
図書紹介します。
－ａ）　室淳子、石村貞夫共著「**Excel**でやさしく学ぶ行列・行列式」　東京図書、**1999.7.26 |2,010 ISBN 4-489-00576-8** の**p.134** 以降に詳しい。

７）**Vera Nikolaevna Faddeeva : " Computational Methods of Linear Algebra"**
Translated by Curtis D. Benster, Dover Publications Inc. N.Y. 1959 ISBN: 0486604241

８）沼田　久・河口敏子他：「経済・社会・工学。農学系のための線形数学（改訂）」
富士書院、1991.4.1改訂2刷、　pp.320
９）鈴木義一郎：「Ｊ言語による統計分析　＜Windows版＞」森北出版
1996.10.14第1版、pp.168
１０）岩井泰夫：「増補　線形代数学」明現社、1974年第１版、1999年増補第１１刷
１１）泉屋周一他：「行列と連立一次方程式」共立出版、1996年初版
１２）福田安蔵他：「ベクトルと行列演習」共立出版、昭和42年初版、同５１年79刷

```
 charn =: 3 : 0      NB. 末尾の n  は  中野の  n
   In =. =@i.n =. # y   NB. In  is  unit-matrix
   X  =. In
   i =. 0
   p =. 1
for _k. >: i.n  do.
  X =. y indot X     NB.  indot is innner product
  pk=. -k% ~ (trace X)   NB. trace is  sum of diagonal elements
  p=. p, pk
  X =. X + pk * In
   i =. i + 1
end.
 |. p
)


lfn =: > @ {: @ p. @ charn
```