

J 言語 と 固有値問題 (その6)

直接法の Frame法 を 主に

中野嘉弘 (84才・札幌市)

山下紀幸 (82才・横浜市)

FAX 専 011-588-3354

TEL/FAX 045-851-3721

yoshihiro@river.ocn.ne.jp

今まで見逃されて来た直接法の最古参、Frame法を主に、前回までの我ら日本勢の Naigen法、仏露の大家 Leverrier-Faddeev法の追加記事を述べる。予定して居た固有ベクトル計算法等の更なる改良の件は次回以降に廻す。

0. は し が き

土佐礼子選手が熱闘した大阪の世界陸上、また谷亮子選手が金メダルで、頑張ってくれたブラジルの国際柔道大会の頃、固有値問題の(その5)「ル・ヴェリエ & ファデーエフ法」を書いた(文献1)。これは、固有値問題の直接法解の白眉である。その送稿後に、それと全く同様のアルゴリズムが、かなり昔から、既に報告されている事を発見した。「Frame法」である。

古屋 茂先生著「行列と行列式」(文献2)の pp.100-102 に解説があり、一般に n 次行列 A の余因子行列 $\text{adj } A$ 、行列式、逆行列、固有多項式を、いちどきに計算する方法である。以前から、多少知ってはいたが、関心が薄かったのは、口惜しい。他の成書にも、殆ど見えぬ。岩波数学辞典では、新しい第4版・第3版に記述は無くなんと、却って、40年以上も昔の第2版に説明があった。James Sutherland Frame (1907-97, 米国) が 1949年に発表した方法であると(文献3)。インターネットで検索しても、詳しい事は判らない。中国語の「法拉米 (frame)」が延々と多数、並ぶだけである。中国恐るべし!

この J.S. Frame は、1945年には代数方程式を解く機械を発明して居る(文献4)。アメリカ数学会の重鎮で、女流数学者の応援で知られる(文献5)。また、数学ジャーナル「パイ・ミュー・イプシロン」社の総裁として、数学の普及にも貢献した(文献6)。

世界の大数学者101人(ユークリッド、フェルマー、オイラー、ガウス、アーベル、ガロア、等々・・・、日本人では高木貞治、谷山豊の名前もある)リストの中で、ABC順でフーリエの次に並ぶ大学者でもある(文献7)。

固有値問題の「直接法」では、例の仏露連合軍、ルベリエ・ファデーエフ法の証明を与えたのは、ロシア女性のファデーエバ Vera Nikolaevna Faddeevaであるとされている(文献8)。その為か?ファデーエフの名前が残って、アメリカ人フレイムの方が無視されたのは、合点が行かぬ。固有値問題で有名なヤコービの名は、先の101人中に残っているのだから、なおさらである。

このフレイムの伝記は、さらに、調べると面白いようだ。

大半の話は、(平成19年)9月18日までに作文して居たが、その後、山下から面白い情報があった。

それによると、ファデーエフ・ルベリ法は、すでに大昔、1985年には、カシオのポケコン数値計算ライブラリーに紹介されており、山下もAPL言語で、固有値問題の

トライを経験して居たと云う（文献9、9-a）。
どうも、古来の「フレイム」法と近頃話題の「ファデーエフ（バ？）」法とは同じもの
だと云える。

さらに、我らの iterative な直接法、Naigen 法関係へのコメントもあるので、追加
する。

1. John Randall 先生のこと

今回の固有値問題・直接法・ファデーエフ（もし女性の方ならば？ ヴァ）のアルゴ
リズム騒ぎの張本人 Randall と同名が、9月 23日の日本物理学会年会（札幌）で話題と
して登場した（文献10）。それは、ハーヴァード大の女流教授 Lisa Randall で、
彼女は、「5次元空間重力理論」で、最近、被引用回数1万回以上の記録を作った。
その著書： *Unraveling the Mysteries of the Uni-verse's Hidden Dimensions* は
ベストセラーとして有名である。

面白い偶然と思ひ感激したが、固有値問題のそれは John Randall で男性である。

それがきっかけで、9月 26日の志村メールは、米国 NJ 州の数学の男の先生を報じて
来た（写真は見ない方がとも・・・）。それにつられて、中野は、写真を拝見、素性を
知った。ニューヨークの隣、NJ 州のニューアーク市の Rutgers Uni. の数学と情報
科学の准教授となっているから、専門家ですね。実は、別人ですが、英国には同名の
ジョン・ランドール卿（1905-1984）が居て、これは物理屋さん。先の第2次世界大戦
当時、電波兵器のマグネトロン陽極の冷却装置の発明で、可能出力を600倍に高め
連合軍の勝利に貢献した。平和利用では「電子レンジ」の開祖に当たる人です。

これが John Randall、世の中とにかく、面白いものです！

2. Frame 法 の あらまし

本法の特長は、固有値問題の厳密解を目指すもので、行列の特性（characteristic）
方程式を扱う。そのアルゴリズムが、高知大学の、数値解析の講義のシラバスの中に
紹介されて居るのを発見した（文献9-b）。

C 言語流に書かれているが、大変、簡単なものだ。

```
データの原行列を A とし、
  X := E;  単位行列
for k := 1 to n do begin
  X := AX;
  c(k) := -( X の対角成分和) / k;
  X := X + c(k)E;
end;
```

c(k) は、特性方程式の各次数の項の係数である。

c(1) は原行列の対角和、c (最高次) は原行列の det (行列式) の値である。

我らの J 言語でも、殆ど、上とそっくりにプログラム出来る。

ただし、カシオ・ポケコン数値計算ライブラリー（文献9-a）の該当説明には、
重大な記述ミスがある。上式の（対角成分和）/k の、k での割り算が脱落して
いるのだ。他の、プログラム例や流れ図は大丈夫のようだが？

その辺は注意して、例題は： A が $\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{matrix}$ ならば

特性方程式は $f(x) = -4 - 13x - 2x^2 + x^3$ である。

固有値は、この（3次）代数方程式の根である。

固有ベクトルは、固有値が異なる場合には、対応する原行列 A の連立方程式を解けば簡単に判る。

実は、この Frame 法の原理の証明は、手ごろな演習問題として、例えば、0. 節の「はしがき」、古屋先生の教科書（文献2 p.102 演習問題 V の 5. ）に出ている。海王星の予言者・ルベリエと素粒子論のファデーエフ教授、あるいはフィールズ賞級の女流数学者ファデーエヴァが証明したとか、または最近、米国の某大学、准教授 John Randall 博士が云々のレベルほどの難問では無いと思われる。大学学部生の演習問題レベルの話であった。実は、すでに或範囲の人々には公知だったのだ。既に 0. 節に述べたが、岩波数学辞典第2版（1954年、文献3）には、次のような記述がある：

【 Frame 法は原理的には、評価出来る。しかし、この方法は計算時の「桁落ちがひどい」、特に「原行列Aの行列式の値が小さい時」には、「精度が悪い」ことが多い。

それに、固有方程式の各次の係数が求められた後に、高次代数方程式の求根をせねばならぬ。この為の計算量が大変だ。】

散々な評価である。実用性が乏しいとして、岩波数学辞典でも第3版以降では、話題から消えて仕舞った。まあ、「神々しい方法」ではないからな！今回、それが、J言語の特長を生かせる数学グループによって、復活したのだ。方法が良くても、道具が悪ければ、残念ながら、通用しない場合があると云うこと！

J言語による Frame 法、同じ事だが、Faddeev 法の関数例は、我らの報告（文献1）の p.4 の Feigenp （特性方程式の求根まで含む）等で与えてある。

3. 逆Frame法の提案

前節に述べた難点「原行列Aの行列式の値が小さい時には精度が悪い」への対策を考える。

固有方程式で、固有値ラムダの最高次からの降べき順での係数は、1, trace(A)・・・・最後が det(A) と、この3つは必須であるが、これらは、J言語派にとっては、計算と云えないほど簡単な事だ。そこで、真っ先に「行列式を計算」し、それが、「0 または 小さい」時には諦めて別な方法でやる判定をする。「可」ならば、Frame法を「最終段階の行列式」から逆行して実行し、最後に簡単に trace(A) 値 と 1 をアペンドすれば終わる。計算らしい計算は、これら簡単な 3項値 以外のみをすれば良い。

この方法を Inverted Feigen 法、略して IFeigen 法と名付けよう。その J Script を Feigen と並べて下掲する（J6. 01版）。
（改良する余地も若干あろうが、それは、ただ今の焦点では無い。）

Ifeigen =: 3 : 0	Feigen =: 3 : 0
t=.6!:1"	t=.6!:1"
In=. unitm n =. # A =. y	In=. unitm n =. # A =. y
Ai=. %. A	
Bd=. det y	Bi =. A
sig=.(1)^n	pi =. trace Bi
nans=. p =. sig* Bd	nans=. 1, (-pi)
i=. 1	i =. 0

```

Bf=. Bd*In
while. i < n-1 do.      while. i < n do.
                        i=. i+1
isig=.i* sig =.(1)^i
Bfi =. (Bf indot Ai)    Bi =. (A indot (Bi - pi * In))
p=. (trace Bfi) % i     pi =. (trace Bi) % i
nans =. nans, p         nans =. nans, -pi
Bf =. Bfi + (p*_1) * In
i=.i+1
end.                    end.
wr (":(6!1"-t), 'sec'   wr (":(6!1"-t), 'sec'
nans=.nans,((trace y)*_1), 1    nans
)                            )

```

諸関数 **unitm** : to make unit matrix
det : to make determinant
indot : inner product between matrices
trace : to get diagonal sum

演算結果は、特性方程式の各次の係数が、当然ながら、両者、互いに逆順に並ぶ。
det 値が先頭になる。結果値全体並びに演算時間は変わらないので例示は省く。
上記には省いたが、プログラムの実際には、**det** 値が 0 の時には、演算を諦めるよう
な分岐を挿入する。

4. 旧プログラム： 山下の改良案

我らの「J言語と固有値問題」シリーズの最初の2報（文献1-a、-b）で、中野は、甚だ愚直的に長大なるJプログラムを用いた。そこで、山下は、その短縮化を努力した。勿論中野も、余り長大では、印刷原稿の作成や紙代がかさむので、短縮化の努力はした。その内に、このシリーズの（その3）、（その4）で述べた如く、極めて簡潔、かつじ次数に依らない万能型の **iterative** なプログラム **Naigen** 法に気付き英国コンピュータ学会の **VECTOR** 誌に投稿する事になった（文献1-c）。

山下は、その間の、プログラム短縮化の努力を、記念碑的に残したい希望を持った。現在もどんどん進行中なので、今は、その旧版の改良案の一部のみに言及して置く。
eigen9y の如く、末尾に **y** の字を付けたものが、山下のものである。

中野にも別に、同様な改良的プログラムがある。それは先頭に、**neigen9** の如くに、文字 **n** を付けてある（長大につき、今はプログラム・リストは掲載しない）。

参考の為に、両者を演算時間で比較して見よう。
山下流（短縮形）と中野流（長大のまま）のプログラムを、マシンは共通に、中野の **Windows XP** マシンで実行して、演算時間の比較テストをした。
データ行列は **エル7**、即ち **l7=. latin 7** の類である。

7次の場合：

山下流	eigen7y l7 からの固有多項式と計算時間（秒）と	時間比は
	1_28_98 2744 2401_67228_16807 470596	0.561sec 28
中野流	neigen7 l7 からは、逆順で	
	470596_16807_67228 2401 2744_98_28 1	0.02 sec 1

8次の場合：

山 **eigen8y l8** から

1_32_304 5120 29184_196608_950272 2.09715e6 9.4318e6 0.841sec 14
中 neigen8 18 から (、多倍長演算をしている)
9437184 2097152_950272_196608 29184 5120_304_32 1 0.06sec 1

9次の場合：

山 eigen9y 19 から
1_45_270 12150 19683_885735_531441 2.39148e7 4.78297e6_2.15234e8 7.57 84
中 neigen9 19 から (、多倍長演算をしている)
_215233605 4782969 23914845_531441_885735 19683 12150_270_45 1 0.09 1

演算の時間の比較では、中野流の方が、数倍から百倍近くも速い。特に、与行列が高次の場合に大差である。

山下は若干の改良で、その演算時間を6割程度の短縮に成功したが、大勢は変わらぬ。この時間差の理由は、未だ、よく判らぬが、ただ云える事は、プログラムを短縮して、「長さ」で得をすれば、「演算時間」で損をするらしい事だ。大昔、アセンブラーとフォートランが演算時間の損得を競った時代もありましたと、思い出しました。この件は、目下も進行中である。いずれ、報告出来よう。

5. Naigen 法 の改良

我らの目に新しく登場した Faddeev や Frame 法を除けば、中野が先に提案した Naigen 法 (文献 1-c) は、先ず、最も短い (直接法) 固有値求解プログラムである。「再帰法」であるから行列の次元によらない。つまり次元毎にプログラムを作る必要も無い。

欠点としては、次元の増加と共に、演算時間が急速に増加する事である。その為、実用上、10次以上では、1時間以上で、待ちくたびれて仕舞う。10次が「限界」か？

既に、固有値—その4 (文献 1-d) の p.3 に述べたが、行列の次数と特性方程式の展開項数との関係は

次数	n=2	3	4	5	6	7	8	9	10
項数	5	16	65	326	1957	13700	109601	986410	9854101

の程度であり、10次では、ほぼ、1千万項を処理せねばならぬ。

数学ソフト Maple で、上の各項を印刷した例では、サイズ4版の紙で、4次では1ページだが、6次ではなんと、33ページも要した。これらの演算プログラムを誤り無く、書き下すとしたら、労力その他、どんな事になるか？

最近再び Maple で、Frame 法の計算の各項を追跡させたら、なんと4次の場合で、はや、能力を超えたとして、下掲の如く、途中打ち切りになって仕舞った。

system error, memory limit 4194304 bytes

直接法の計算とは、この程度にギリギリの限界作業なのである。従って、Naigen法の旧版では、10次の計算が限界であった。最近、この壁を突破して13次まで処理出来たので、追加報告する。

Naigen 法は、処理の対象行列の次数を逐次、ステップダウンして行き、最後に、2次の行列の集合体として、纏めあげるものであった。

ところが、その後の努力によって、9次の固有値求解関数、例えば、中野の neigen9、山下の eigen9y 等が出来たので、上記、ステップダウン (遞降) の終点を、2次では無く、より手前の9次にすれば、遞降による項数の増加は大幅に避けられる。

その様に、改良した関数を、`nnaigen`、さらに時間計時をも組み込んだ関数を `Tnnaigen` とする。 そのテスト結果は

10	<code>Tnnaigen latin 10</code>	演算時間	0.841 sec	(昔の 1 時間超が 1 秒以下に短縮)
11	<code>Tnnaigen l11</code>	演算時間	8.883 sec	
12	<code>Tnnaigen l12</code>	演算時間	107.224 sec	
13	<code>Tnnaigen l13</code>	演算時間	1399.76 sec	(約 2 4 分)

大成功であった。 データ処理は纏めてやるべきだ！

次の次数 14 では、恐らく 5 時間以上を要するであろうから、テストはせぬ。しかし、アイデアの有効さは立証された。 今後の改良の指針となろう。

6. む す び

固有値問題の解の直接法は、「高次代数方程式の求根関数 `p.`」を有する J 言語が特に有効な分野である。 今後の発展が、更に期待される。

それにしても、岩波数学辞典の版毎に、Frame 法が、出たり引っ込んだりしたのは何故であろうか？ 学問には「判り易さ」よりも「神々しさ」の方が大切なのかな？ 旨く両立させたいものだ。 ルベリエ・ファデーエフ法は、それに成功したか！

文 献

- 1) 中野嘉弘・山下紀幸：「J言語と固有値問題（その5） ファデーエバ法」
JAPLA報告 2007 Sep22 pp.8
- a) 中野嘉弘「J言語と高等数学（固有値問題直接法）」JAPLA報告
2007.4.2 pp.9
- b) 中野嘉弘「J言語と固有値問題（その2）直接法の発展」JAPLA報告
2007.5.26 pp.13
- c) 中野嘉弘「J言語と固有値問題（その3）VECTOR誌投稿原稿」JAPLA報告
2007.6.23 pp.3
- d) 中野嘉弘「J言語と固有値問題（その4）チュートリアル等 LAPACKまで」
JAPLA報告 2007.6.23 pp.9

- 2) 古屋 茂「行列と行列式」培風館、1957 初版、1959 増補版、1998 増補第65刷
- 3) 「岩波数学辞典 第2版」 1954.4 第1刷、1960.12 増訂第1刷、
1968.6 第2版第1刷 p.421
- 4) <http://thamous.univ-rennes1.fr/sites/graph/algeq/>
- 5) <http://www.agnesscot.edu/lriddlw/women/prizes.htm>
- 6) <http://cache.yahoofs.jp/search/cache?p=James+Sutherland+Frame&ei>
- 7) <http://www.lipn.univ-paris13.fr/~banderier/Recipro/node53.html>
- 8) <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/FaddeevLeverrierMod.html>
Vera Nikolaevna Faddeeva : "Computational Methods of Linear Algebra"
(Translated from The Sussian by Curtis D.Benster) Dover Publications
Inc. N.Y. 1959 ISBN 0486604241

- 9) 山下 FAX ('07.10.) カシオ・ポケコン数値計算ライブラリー
- a) 内田昭宏 他：「カシオ ポケコン数値計算ライブラリー」
誠文堂新光社 1985 pp.42-48
「1-6 ファジューエフ・ルベリ法（固有値）」
- b) <http://lupus.is,kochi-u.ac.jp/~shiota/la98/la98.html>
同上内 v23.dvi 数値解析C（塩田） 2007年 1月 17日
固有値・固有ベクトル（実対称行列のJacobi法、一般行列のFrame直接法）

- 10) 中野電子メール志村氏宛 ('07.Sept.25)：日本物理学会年会（於いて北大）
Sept.23 午後、素粒子論会場講演「5次元重力に於ける対称性」内の話題、
Randall- Sundrum Background。 Lisa Randall (Harvard大女流教授)。
JAPLA報告 2007.6.23 pp.9