JAPLA 2007 May 26　　　　　　H19.Apr2-May20　NEIGEN８.doc

Ｊ言語　と　固有値問題　　（その２）

高等数学（直接法）の発展

中野嘉弘　（８４才・札幌市）

FAX 専　011-588-3354　　　　yoshihiro@river.ocn.ne.jp

前稿「Ｊ 言語 と 高等数学－固有値問題（直接法）を主に」の発展である。
さらに高次の**eigen7, eigen8, eigen9** を処理した。　「ダニレフスキー法とは何か」
の理解に繋ぐのが狙いである。

は　し　が　き

前稿「Ｊ 言語 と 高等数学－固有値問題（直接法）を主に」（文献１）の続報を
提供する。
固有値問題とＡＰＬ／Ｊの関連の話題は余り見えないようだ。（文献２）
昔、大学の教養部の数学で、線形代数の最後に固有値問題は、必須であったものだ。
（文献３、４）
また、固有値問題は、統計（いわゆる多変量解析）の電算処理でも必須項目であって
多くの入門、解説書が出版されている。（文献６、７）
そして「何とか法」例えば ヤコビ法、ハウスホルダー法、二分法、逆反復法、**QL**法、
QR法、べき乗法、ダブル**QR**法　等々、「神々しい名前」の解法が登場する。
目もくらむばかりである。　時には、これら諸解法の分類学やデータベースの作成まで
あるらしい・・・？
ところが、実際に使おうとすると、そう容易な技では無いのだ。　何故か？
方法と云うか？根底にあるアルゴリズムが大変、多岐であって、話の焦点が、絞り難い
のである。　それに対して前法（文献１）でも紹介した「直接法」ならば、その点は
単純明快である。
そもそも、これら「神々しい諸法」で、おなじみ大学教養レベルの固有値問題の正解が
得られるのであろうか？　その疑問の復習から始めよう。
最後には、直接法の実行プログラムで登場する幻の「ダニレフスキー法」（文献６）を
考察する。

１．　いまさら何故　　直　接　法　か?

数値計算の戸川先生の有名な入門書（文献６）に、簡単な例がある。

2x2 行列　　**m2 = |3 2|**　の固有値を「べき乗法」で求めること。
　　　　　　　　|4 1|
答は暗算で判るほど簡単で　５ と －１　であるが、「べき乗法」への入門として、
説明に１頁を費やしている。

おさらいとして、解の諸法を試みる。　一部、前報も再録する。

１）鈴木先生流の　 evs 法　（文献２）

2 evs m2 より、解は　　　　6.5 と　8.88178e_16

２）竹内先生流の　 eigen法　（文献１１）

eigen m2　より、解は　　　　4.23607 と　_0.236068

※　Jacobi法は対称行列にしか適用出来ないが定説である。

３）　べき乗法　（中野、昔の　ＡＰＬ　―＞　Ｊ　プログラム）

m2 pow 0.1 （精度）　より、

解は　5 と　8.88178e_16（第２固有値は、上記・鈴木のと一致）

※　非対称行列で、最大固有値だけを求める場合によく用いられるが定説だ。

４）　直接法（今は暗算でも出きる）の解は、同上で　　5 と　_1

※　これが正解！

５）　ＱＲ法：山下流の　ｙＱＲ法、yeigen 法　　（文献１０）

yQR =: 126!:0　　及び、その組み合わせ関数　yeigen

※　反復回数　によって解は変化する。

１回	yQR m2	から　解は	5 と	1　（最初は　not _1 !)
２回	2 yeigen m2	〃	5.05 505	_1.05505
３回	3 yeigen m2	〃	4.98781	_0.987809
４回		〃	5.00239	_1.00239
５回		〃	4.99952	_0.99952
	・・・・・・・・・・・・・			
８回	8 yeigen m2	〃	5	_1

予め、解が判っていなければ、反復回数は・・・・・？　どこで停止させるか？
例えば、与行列　A27　（前報 p.5）　の場合、直接法との一致までに、８００回の yeigen 法の反復を要した。

まして、複素数がらみの場合には大変だ。　これには、
解が複素数になる場合と、与データの一般行列が複素数を含む場合がある。
どの「神様」に御参りするか？　つまり、解法の選択に戸惑うこともあろう。
と云う訳で、大学教養レベル数学でも、より高次の行列の問題では、さらに苦労が予想される。　直接法が可能ならば、それらの危惧も無く、これに超した事は無い。

※　前報のミスプリント訂正

p.2 中央　例３）　３ x ３行列　A　の固有方程式の展開係数の３行目

(b11*b22) + (b11*b33) + ・・・・・・・内の　b は　a　と直せ。

なお、一般的に、非常に多くの展開係数が出現するので、報告書の文書処理で
思わぬミスの可能性あり、御寛恕、適宜御訂正を乞う。

p.7 左側、９行目付近　 unitm （単位行列作成）　など：

中野は目下、Ｊ６０１版を使用していますので、旧版とは多少差異があります。
適宜、読み換えて下さい。　（ミスプリントでは無い場合があります。）

２．　７次以上の一般行列の固有値問題の直接法

前報では、６次（関数 eigen6 ）までを述べた。　J Script は、pp. 7-9 。

その後、７次、８次、９次　までを解く関数を作成出来た。　**eugen7, eigen8** である。
処理すべき項数の増加は指数関数的に莫大となるので、その先を考え、もっと要領の良い処理法をも考案して用いた場合もある。

その場合の **Script** には、先に文字　**n** を付して　**neigen7, neigen8, neigen9** などとした。　演算比較の為、両法を混在させた **Script** も作った。　それは、先に文字　**b** を付して、　**beigen7, beigen8** 等としたものもある。
９次以上では、 **neigen** 一種類のみに止めた。　（ **J Script** は末尾）
とにかく、項数が多いので、アイデアもさることながら、そのチェックが大変である。
既成の有名数学ソフト、　Ｍａｐｌｅ　や　**Mathematica** は大したものだと思う。

●　７次行列：

```
              |0 1 0 0 0 0 0|
              |_2 0 1 1 0 3 0|        演算　　neigen7  mp173t7
              |1 1 0 0 0 _1 0|
 mp173t7 =  |1 0 0  0 0 _1 0|        固有多項式の係数は
              |_1 0 4 2 _1 1 0|    λ　の　最高次を右端にして
              |0 1 0 0 0 0 0|    0 0 0 2 0 _3 0 1
              |0 0 0 0 0 0 1|
```

Ｊ　言語の関数　**p.**（多項式の求根）　を用い
固有値は　　　　**1.41421 _1.41421 1 _1 0 0 0**
即ち　固有多項式は、下記の如く、因数分解される事が判る。
(λ^2 - 2)（λ^2 - 1）・λ^3

なお、この例題は、北海道で小樽商大他で多く採用されている数学教科書（文献４）からのものである。　名前の意味は、**m** はマトリックス、 **p173**　はペイジ**173**、　**t7** は問７　を意味する。　７次は、この教科書の問題では最高次であった。

●　８次行列：これより高次の例題には戸川先生訳著（文献９）内のものが利用出来る。　しかし、再録するのはシンドイので、ここでは、もっと簡単な例で示す。

```
         |8 1 1 1 1 1 1 1|
         |1 8 1 1 1 1 1 1|   演算　eigen8  F88
         |1 1 8 1 1 1 1 1|
  F88 = |1 1 1 8 1 1 1 1|
         |1 1 1 1 8 1 1 1|
         |1 1 1 1 1 8 1 1|
         |1 1 1 1 1 1 8 1|
         |1 1 1 1 1 1 1 8|
```

固有多項式の係数は　λ　の　最高次を右端にして
12353145 _13176688 6117748 _1613472 1763 _64 1

Ｊ　の多項式求根関数 **p.** を用い、　固有値は　簡単に
15 7 7 7 7 7 7 7 である。

固有多項式は因数分解されて、簡単に
(λ - 15)・（λ - 7）^7　　　となる。

この例は実対称行列であるから、ポピュラーな **Jacobi**法でも処理出来る。

● ９次行列の場合：　（非対称行列の例で示す）

```
            |9 0 0 0 0 0 0 0 0|
            |1 9 0 0 0 0 0 0 0|
            |1 1 9 0 0 0 0 0 0|
            |1 1 1 9 0 0 0 0 0|
   F990 = |1 1 1 1 9 0 0 0 0|
            |1 1 1 1 1 9 0 0 0|
            |1 1 1 1 1 1 9 0 0|
            |1 1 1 1 1 1 1 9 0|
            |1 1 1 1 1 1 1 1 9|   演算　neigen9　F990
```

固有多項式は　λ　の　最高次を右端にして、次の１０項
_387420489 387420489 _172186884 44641044 _7440174 826686 _61236 2916
_81 1
解は、　Ｊの関数　p. を用い
固有値は、なんと　すべて　９、　即ち　9 9 9 9 9 9 9 9 9、
即ち、　固有多項式は、　（λ -　9）^9　　と簡単に因数分解される。

この　neigen9 の　J Script （プログラム）を印刷したら、Ａ４版の紙で　１４ページ にもなったので、掲載を省く（より短い ８次の neigen8 の方を末尾に）。

３．　検算し易い　例題

線形代数学問題集（水本久夫著、文献１２）の p.137 に
次の形の行列Ａ

```
            |a b c d e f g ................. r s t|
            |1 0 0 0 0 0 0 ................. 0 0 0|
            |0 1 0 0 0 0 0 0 ................. 0 0|
            |0 0 1 0 0 0 0 0 0 ................. 0|
   Ａ　＝ |0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 .................|
            |                       |
            |                       |
            |0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ..............1 0|
```

の固有多項式は、簡単に展開出来て
ｆ（λ, ｎ）＝（λ^n ＋ a*λ^(n-1)＋ b*λ^(n-2)＋　・・・s*λ ＋ t）＊(-1)^n
となる。
これを利用すると、検算し易い演習問題を作れる。

余談めくが、同様の解説を古書（文献１３、 pp.54-57）の中で発見した。
その中の Historical Note によれば、このような問題は、 Frobenius などが すでに 1879年ころ、しきりにやって居たらしい。　温古知新！
さらに、この固有値（第２報）の作成中に、前報（文献１）の 「文献８： 小田島ＦＡＸ」の意味が深まった。　ダニレフスキー法に関するものだ。　岩波数学辞典第３版

への補足である。　おさらいしておく。　　一般行列の変形法関係だ。
Lanczos 法（1950）、 Danilevskii法（原紹介 1945, 改良案 1971）　岩波はここまで」

北大名誉教授・小田島先生所有の訳本「マトリックスの理論と応用：Ｒ．ツルミュール原著」では　Danilevskiiの原著は　３　ペイジありで 1937年刊、与行列を、上記の Frobenius 行列の形になるように変換を努力する事とあるそうだ。　理解は一歩前進！
とにかく、これ以上のことは不明なのだ。
我らのやるべき事について、上記の古書の　p.41 には次の如く書いている。
the characteristic function

φ（λ, ｎ）＝（λ^n － p1*λ^(n-1)＋ p2*λ^(n-2)－　・・・pn*(-)^n）*(-)^n

where p1, p2, ・・pr ・・　is the sum of the diagonal minors of order r of A,
and pn is the determinant |A| itself. (from Invariants, p.98)

その古書を書いた Turnbull,H.W. の著書が Invariants （1929）であった。

さあ、the sum of the diagonal minors of　A とやらを計算しよう！
それが今回、我が　Ｊ 言語の軌道に載ったのだ。
もっとも、数学の大百科事典（文献５）には、４次 以上は、書き下ろすのが、面倒だと悲鳴を挙げているが。

最近、西川ＦＡＸ（'07.5.13 am.9:32） によれば、中野とは別に、固有値直接計算を ５次 まで完成し、正規表現を用いた「固有値計算の教育的プログラム」を完成したとの知らせがあった。　近く、Ｊ研究会で発表予定とか！　（文献１６）

４．　　複素数　からみでの　知見

直接法の長所を示そう。　巷間流布する固有値問題解法には、与行列の対称性の他に、複素数からみで、様々な問題を起こす。　直接法では、固有代数方程式の数値解を求めるだけであるので、これらは格別の問題では無い。
この辺を比較して見よう。

● 複素数解は、黙っていても、出て来るのか？
例１）　na2=. 2 2 $ 1 1 _1 1　として　直接法　eigen2 na2 の結果は
1j1 と　1j_1
前節　１．で紹介下した　yeigen na2　の結果は　1.41421 が２つ。
プログラムの作り方では、何もせずに、　データ行列をそのまま帰す。

山下ＦＡＸ（文献１４）によれば、データ行列に、複素数係数が含まれていれば
複素数解が得られるとの事。

例２）　ya2 =. 2 2 $ 1 1 _1j0.001 1　として
直接法　の結果は　1.0005j1　0.9995j_1
yeigen の結果は　1.00002j0.0499584 と　0.999975j_0.0499584
これは iteration １００回の結果である。　山下ＦＡＸ、鵜呑みには出来ぬ。

これらの事情を、参考書類はどう書くか？
大著「行列計算ソフトウエア」（文献１５）の p.219、１１．１０節　ダブルＱＲ法の冒頭の記述は次の通り。

「ＱＲ法は実一般行列や複素一般行列の『すべて』の固有値を求めるやり方」

しかし、この内容は、直上の例題の如く理解する必要がある。　自分に好都合のように甘く考えてはならぬらしい。

５．　む　す　び

固有値問題の解法で、直接法のメリットを述べた。
やりたい事は自明である。　能率的な解法が期待されるだけ。
それが難儀なので、多くの年月と近似解法法の山が築かれているのも事実だ。
旨くやるのも楽じゃなかろう！　覚悟せにゃならん。
より詳しい議論の発展を期待する。　末尾（文献の後）に、関係する　Ｊ　言語によるプログラム等をまとめて置いた。　今後の激励と御叱正を乞う。

文　　献

１）中野嘉弘：「Ｊ言語　と　高等数学　－　固有値問題（直接法）を主に」 **JAPLA 2007 Apr 28　pp.9**

２）鈴木義一郎著「Ｊ言語による統計分析」森北出版、**1996.10** 第１版第１刷 **pp. 119-135**

３）矢野健太郎・石原　繁著「科学技術者のための基礎数学（新版）」裳華房 **1983** 新版第２６版、**pp.219-223**

４）沼田　久・河口敏子・行方常幸・林善之・森本　仁・山本隆範　著
「経済・社会・工学・農学系のための線形数学（改訂）」富士書院、
1991 改訂２刷、**pp.159-173**

５）**E. W. Weisstein: "CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS (2nd edition)" Chapman & Hall/CRC 2003, Eigenvalue　p. 855r**

６）計算技法シリーズ　　戸川隼人「数値計算入門」オーム社、昭和４５年、第１版

７）情報処理入門コース７　戸川隼人「数値計算」岩波書店、**1991** 第１刷

８）小田島**FAX (2007.Apr.20.14:00)** 固有値の数値計算法
岩波数学辞典　第３版　**130 D.**

９）　**J.R.** ウエストレイク著・戸川隼人 訳「コンピュータのための線形計算ハンドブック」培風館、昭和４７年**(1972)** 初版

１０）山下ＦＡＸ　**2007.5.12 pm.12:11 & 13:50** 「**temp=:128!:0, fst, snd**」
この方法、その先は我がＪの会の畏友・志村正人氏からの情報とか聞く。
実は「Ｊ　**Quick Reference**」、例えば **JAPLA '98** 版　**p.11** に掲載のもの。

１１）竹内寿一郎：電子メール **2007**年**2**月**8**日　**18:25** 「**J601**　を使ってみて」
添付ファイル　**stat.ijs,　math.ijs,　jacobi.ijs　etc**
後日談だが、その先はどうも、志村氏推奨の　ＬＡＰＡＣＫ　になるらしい。
その中には「ふつうの固有値用の　**dgeev.ijs**」も含まれるそうだとあった。
しかし、肝心の　**LAPACK** がどうにも読めないので、どうにもならぬ。
（試行錯誤の最中に、Ｊの古い多くの **Script Files** が消えてしまった。　多くは「数独」関係で、世界最高次の例など、多くの資料が失われた。　口惜しい！）

１２）水本久夫著「線形代数学問題集」培風館、昭和６０年１１月　**1985** 初版

１３）**H.W.Turnbull, A.C.Aitken　:　” An Introduction to the Theory of Canonical Matrices” St. Andreews　Edinburgh,　Nov 1944, 2nd Ed. pp.192**（初版は **Dec 1931**）。　これは、札幌市の北星大学図書館の廃棄図書を偶然、古本屋で見付けたものだ（平成４年のこと）！

１４）山下ＦＡＸ（**'07.5.12 18:10**） 複素行列では複素数解が求まる。
１５）小国　力編著、村田健郎・三好俊郎・ドンガラ,**J.J.**、長谷川秀彦　著
「行列計算ソフトウエア　　ＷＳ、スーパーコン、並列計算機　フロッピー
ディスク付き」丸善、平成３年１１月３０日　**pp.391**
１６）西川ＦＡＸ（**'07.5.13 am9:32**） **eigen_result**、 正規表現
「神々しい名前」の数々の固有値計算法は、特性方程式の直接計算の前には、
まるで無力です。　全く同感です。

J Script of neigen8 from Y.NAKANO (札幌市)
2007. May 20
Version J601

```
  neigen8=: 3 : 0
          wr y
   wr   ' ndg, trace,det,nmdet & nd2 '
         tray=.+/ ndg=.  diag y
   wr   ndg
   wr tray
   wr   dety=. det y
    wr ' my '
       my =. minorir y
    wr ' nmdet '
   wr  nmdet=. detc my
    wr  ' nd2 '
   wr   nd2 =. p2c y
 NB.
   wr ' nd6  = '
          c8=.> cm8=. 0{my
          c7=.> cm7=. 1{my
          c6=.> cm6=. 2{my
          c5=.> cm5=. 3{my
          c4=.> cm4=. 4{my
          c3=.> cm3=. 5{my
          c2=.> cm2=. 6{my

        mc8=.     minorir c8
        mc7=.  }. minorir c7
        mc6=.  2}. minorir c6
        mc5=.  3}. minorir c5
        mc4=.  4}. minorir c4
        mc3=.  5}. minorir c3
        mc2=.  6}. minorir c2

  wr nd6=.+/(detc mc8),(detc mc7), (detc mc6),(detc mc5),(detc mc4),(detc mc3),(detc mc2)
NB.
    wr ' nd5 = '
  NB. wr ' mc8   '
  NB. wr   mc8
      mc87=.     minorir c87 =. > 0{ mc8
      mc86=.  }. minorir c86 =. > 1{ mc8
      mc85=.  2}. minorir c85 =. > 2{ mc8
```

```
    mc84=.  3}. minorir c84 =. > 3{ mc8
    mc83=.  4}. minorir c83 =. > 4{ mc8
    mc82=.  5}. minorir c82 =. > 5{ mc8
d58=.+/(detc mc87),(detc mc86),(detc mc85),(detc mc84),(detc mc83),(detc mc82)

NB.  wr  '  mc7 '
NB.  wr     mc7

    mc76=.   }. minorir c76 =. > 0{ mc7
    mc75=.  2}. minorir c75 =. > 1{ mc7
    mc74=.  3}. minorir c74 =. > 2{ mc7
    mc73=.  4}. minorir c73 =. > 3{ mc7
    mc72=.  5}. minorir c72 =. > 4{ mc7
d57=.+/(detc mc76),(detc mc75),(detc mc74),(detc mc73),(detc mc72)

NB.  wr  '  mc6 '
NB.  wr     mc6
   mc65=.  2}. minorir c65 =. > 0{ mc6
   mc64=.  3}. minorir c64 =. > 1{ mc6
   mc63=.  4}. minorir c63 =. > 2{ mc6
   mc62=.  5}. minorir c62 =. > 3{ mc6
d56=.+/(detc mc65),(detc mc64),(detc mc63),(detc mc62)
NB.
   mc54=.  3}. minorir c54 =. > 0{ mc5
   mc53=.  4}. minorir c53 =. > 1{ mc5
   mc52=.  5}. minorir c52 =. > 2{ mc5
 d55=.+/(detc mc54),(detc mc53),(detc mc52)
NB.
   mc43=.  4}. minorir c43 =. > 0{ mc4
   mc42=.  5}. minorir c42 =. > 1{ mc4
 d54=.+/(detc mc43),(detc mc42)
NB.
   mc32=.  5}. minorir c32 =. > 0{ mc3
  d53=. detc mc32
wr    nd5=.+/d58, d57, d56, d55, d54, d53
  NB.
  wr  ' nd4 = '
    mc876=.      minorir c876 =. > 0{ mc87
    mc875=.   }. minorir c875 =. > 1{ mc87
    mc874=.  2}. minorir c874 =. > 2{ mc87
    mc873=.  3}. minorir c873 =. > 3{ mc87
    mc872=.  4}. minorir c872 =. > 4{ mc87
   d487=.+/ (detc mc876),(detc mc875),(detc mc874),(detc mc873),(detc mc872)
  NB.
    mc865=.   }. minorir c865 =. > 0{ mc86
    mc864=.  2}. minorir c864 =. > 1{ mc86
    mc863=.  3}. minorir c863 =. > 2{ mc86
    mc862=.  4}. minorir c862 =. > 3{ mc86
   d486=.+/ (detc mc865),(detc mc864),(detc mc863),(detc mc862)
  NB.
    mc854=.  2}. minorir c854 =. > 0{ mc85
    mc853=.  3}. minorir c853 =. > 1{ mc85
    mc852=.  4}. minorir c852 =. > 2{ mc85
```

```
  d485=.+/ (detc mc854),(detc mc853),(detc mc852)
 NB.
     mc843=.  3}. minorir c843 =. > 0{ mc84
     mc842=.  4}. minorir c842 =. > 1{ mc84
  d484=.+/ (detc mc843),(detc mc842)
 NB.
      mc832=.  4}. minorir c832 =. > 0{ mc83
  d483=.+/ (detc mc832)
NB.     wr   ' d48 '
     d48=.+/d487, d486, d485, d484, d483
 NB.

    mc765=.   }. minorir c765 =. > 0{ mc76
    mc764=.  2}. minorir c764 =. > 1{ mc76
    mc763=.  3}. minorir c763 =. > 2{ mc76
    mc762=.  4}. minorir c762 =. > 3{ mc76
 d476=.+/ (detc mc765),(detc mc764),(detc mc763),(detc mc762)
 NB.

    mc754=.  2}. minorir c754 =. > 0{ mc75
    mc753=.  3}. minorir c753 =. > 1{ mc75
    mc752=.  4}. minorir c752 =. > 2{ mc75
 d475=.+/ (detc mc754),(detc mc753),(detc mc752)
  NB.

    mc743=.  3}. minorir c743 =. > 0{ mc74
    mc742=.  4}. minorir c742 =. > 1{ mc74
 d474=.+/ (detc mc743),(detc mc742)
  NB.
      mc732=.  4}. minorir c732 =. > 0{ mc73
    d473=.+/ (detc mc732)
      d47=. +/ d476, d475, d474, d473
  NB.

      mc654=. 2}. minorir c654 =. > 0{ mc65
      mc653=. 3}. minorir c653 =. > 1{ mc65
      mc652=. 4}. minorir c652 =. > 2{ mc65
     d465=.+/ (detc mc654),(detc mc653),(detc mc652)
 NB.
      mc643=. 3}. minorir c643 =. > 0{ mc64
      mc642=. 4}. minorir c642 =. > 1{ mc64
     d464=.+/ (detc mc643),(detc mc642)
  NB.
      mc632=.  4}. minorir c632 =. > 0{ mc63
     d463=.+/ (detc mc632)
       d46=. +/d465, d464, d463
    NB
      mc543=.  3}. minorir c543 =. > 0{ mc54
      mc542=.  4}. minorir c542 =. > 1{ mc54
     d454=. +/ (detc mc543),(detc mc542)
    NB.
       mc532=.  4}.  minorir c532 =. > 0{ mc53
      d453=. +/ (detc mc532)
```

```
     d45=. +/d454 , d453
  NB.
     mc432=.  4}. minorir c432 =. > 0{ mc43
    d44=. +/ (detc mc432)
  wr   nd4 =.+/ d48, d47, d46, d45, d44

NB.   wr  ' nd3 =  '

  mc8765=.     minorir c8765 =. > 0{ mc876
  mc8764=.  }. minorir c8764 =. > 1{ mc876
  mc8763=.  2}. minorir c8763 =. > 2{ mc876
  mc8762=.  3}. minorir c8762 =. > 3{ mc876
 d3876=.+/ (detc mc8765),(detc mc8764),(detc mc8763),(detc mc8762)
NB.

  mc8754=.  }. minorir c8754 =. > 0{ mc875
  mc8753=.  2}. minorir c8753 =. > 1{ mc875
  mc8752=.  3}. minorir c8752 =. > 2{ mc875
 d3875=.+/ (detc mc8754),(detc mc8753),(detc mc8752)
NB.

  mc8743=.  2}. minorir c8743 =. > 0{ mc874
  mc8742=.  3}. minorir c8742 =. > 1{ mc874
 d3874=.+/ (detc mc8743),(detc mc8742)
NB.
  mc8732=.  3}. minorir c8732 =. > 0{ mc873
 d3873=.+/ (detc mc8732)
NB.
 d387 =. +/ d3876, d3875, d3874, d3873
NB.

  mc8654=.  }. minorir c8654 =. > 0{ mc865
  mc8653=.  2}. minorir c8653 =. > 1{ mc865
  mc8652=.  3}. minorir c8652 =. > 2{ mc865
 d3865=.+/ (detc mc8654),(detc mc8653),(detc mc8652)
NB.
   mc8643=.  2}. minorir c8643 =. > 0{ mc864
   mc8642=.  3}. minorir c8642 =. > 1{ mc864
  d3864=.+/ (detc mc8643),(detc mc8642)
NB.
   mc8632=.  3}. minorir c8632 =. > 0{ mc863
  d3863=.+/ (detc mc8632)
NB.
  d386=. +/ d3865, d3864, d3863
NB.

   mc8543=.  2}. minorir c8543 =. > 0{ mc854
   mc8542=.  3}. minorir c8542 =. > 1{ mc854
  d3854=.+/ (detc mc8543),(detc mc8542)
 NB.
   mc8532=.  3}. minorir c8532 =. > 0{ mc853
  d3853=.+/ (detc mc8532)
 NB.
```

```
    mc8432=.  3}. minorir c8432 =. > 0{ mc843
   d3843=.+/ (detc mc8432)
  NB.
      d385=. +/ d3854, d3853,d3843
  NB.
      d38=. +/ d387, d386, d385
  NB.

      mc7654=.   }. minorir c7654 =. > 0{ mc765
      mc7653=.  2}. minorir c7653 =. > 1{ mc765
      mc7652=.  3}. minorir c7652 =. > 2{ mc765
     d3765=.+/ (detc mc7654),(detc mc7653),(detc mc7652)
 NB.
      mc7643=.  2}. minorir c7643 =. > 0{ mc764
      mc7642=.  3}. minorir c7642 =. > 1{ mc764
     d3764=.+/ (detc mc7643),(detc mc7642)
NB.
      mc7632=.  3}. minorir c7632 =. > 0{ mc763
     d3763=.+/ (detc mc7632)
NB.
     d376=. +/d3765, d3764, d3763
NB.
      mc7543=.  2}. minorir c7543 =. > 0{ mc754
      mc7542=.  3}. minorir c7542 =. > 1{ mc754
     d3754=.+/ (detc mc7543),(detc mc7542)
NB.
      mc7532=.  3}. minorir c7532 =. > 0{ mc753
     d3753=.+/ (detc mc7532)
NB.
      mc7521=.  3}. minorir c7521 =. > 0{ mc752
NB.
     d37=. +/ d376, d3754, d3753  , (detc mc7521)
NB.
      mc6543=.  2}. minorir c6543 =. > 0{ mc654
      mc6542=.  3}. minorir c6542 =. > 1{ mc654
     d3654=.+/ (detc mc6543),(detc mc6542)
NB.
      mc6532=.  3}. minorir c6532 =. > 0{ mc653
     d3653=.+/ (detc mc6532)
NB.
       d365=. +/ d3654, d3653
NB.
      mc6432=.  3}. minorir c6432 =. > 0{ mc643
     d364=.+/ (detc mc6432)
NB.
      mc5432=.  3}. minorir c5432 =. > 0{ mc543
     d354=.+/ (detc mc5432)
NB.
NB.  wr  ' nd3 =  '
    wr   nd3=. +/ d38, d37, d365, d364,d354
NB.
     wr  '  nans8  =  '
```

```
wr  x:   nans8=.(dety),(-nmdet),(nd6),(- nd5),(nd4),(-nd3),  (nd2),  (-tray) , 1

      wr  '  neigen8 values = '
     {: p. nans8
    )

      NB.


     a38=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
   1 1 0 0 0 0 0 0
   1 2 2 0 0 0 0 0
   1 2 3 3 0 0 0 0
   1 2 3 4 4 0 0 0
   1 2 3 4 5 5 0 0
   1 2 3 4 5 6 6 0
   1 2 3 4 5 6 7 7
   1 2 3 4 5 6 7 8
    )
      A38=: 8 8 $ a38

      a39=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
   8 7 6 5 4 3 2 1
   7 7 6 5 4 3 2 1
   6 6 6 5 4 3 2 1
   5 5 5 5 4 3 2 1
   4 4 4 4 4 3 2 1
   3 3 3 3 3 3 2 1
   2 2 2 2 2 2 2 1
   1 1 1 1 1 1 1 1
   )
      A39=: 8 8 $ a39

   FL=: 3 : 0
     (1%2)%(1 - (2&o.( ((_1)+2*y)*pi%25)) )
     )

      a88=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
       0 1 0 0  0  0 0
_2 0 1 1  0  3 0 0
 1 1 0 0  0 _1 0 0
 1 0 0 0  0 _1 0 0
_1 0 4 2 _1  1 0 0
 0 1 0 0  0  0 0 0
 0 0 0 0  0  0 1 0
 0 0 0 0  0  0 0 2
  )
     A88=: 8 8 $ a88

      f88=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
   8 1 1 1 1 1 1 1
   1 8 1 1 1 1 1 1
   1 1 8 1 1 1 1 1
```

```
1 1 1 8 1 1 1 1
1 1 1 1 8 1 1 1
1 1 1 1 1 8 1 1
1 1 1 1 1 1 8 1
1 1 1 1 1 1 1 8
)
   F88=: 8 8 $ f88


    a35=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
   611  196 _192  407   _8  _52   _49    29
   196  899  113 _192  _71  _43    _8   _44
  _192  113  899  196   61   49     8    52
   407 _192  196  611    8   44    59   _23
    _8  _71   61    8  411 _599   208   208
   _52  _43   49   44 _599  411   208   208
   _49   _8    8   59  208  208    99  _911
    29  _44   52  _23  208  208  _911    99
   )
   A35=: 8 8 $ a35



 detc=: 3 : 0
        +/> (det each  y)
        )

fst=:>&(0&{)
snd=:>&(1&{)

temp=: 128!:0
d=: snd +/ . * fst
pwr=:^: 100
eval_t=: d & temp


yeigen =: 3 : 0
eval_t pwr y
 :
eval_t ^:(x) y
)
```