JAPLA 2007 Apr 28　　　　　H19.Mar24-Apr22 EIGEN.doc

Ｊ言語　と　高等数学

固有値問題　（直接法）　を　主に

中野嘉弘　（８４才・札幌市）

FAX 専　011-588-3354　　　　yoshihiro@river.ocn.ne.jp

前回の「Ｊ 言語 と 初等数学」に続いて、大学教養部程度の高等数学への応用を話題にしたい。　　そこでの「線形代数」の終点は「固有値問題」であろう。
そして、いわゆる直接法が制限がなく、きわめて一般的である。

は し が き

固有値問題とＡＰＬ／Ｊの関連の話題は余り見掛けない。
しかし、我らがＪ会友・鈴木義一郎先生の名著「Ｊ言語による統計分析」の末尾には、固有値問題が見える。　第７章の主成分分析の中である。　（文献１）
例題に「美女のプロポーション」があるので、記憶されて居られる方も少なく無いと思われる。　旨く利用出来たかな？　ミス・ユニヴァースこと児島明子さんが登場であった。

昔、大学の教養部の数学で、線形代数の最後で、固有値問題は、必須であったものだ。　（文献２、３）　　今でもそうかな？　　今は教養を教えるのが大学で、専門教育担当は大学院だとか！　に変わったそうだが？　まー、適当に読み換えて下さい。

また、固有値問題は、統計（いわゆる多変量解析）の電算処理では必須項目であって多くの入門、解説書が出版されている。（文献４、５）

ところが、実際に使おうとすると、そう容易な技では無いのだ。　何故か？
方法と云うか？根底にあるアルゴリズムが大変、多岐であって、話の焦点が、絞り難いのである。　例えば、前記・鈴木先生著の中の固有値を求める関数 evs には、条件があって、演算対象が実対称行列で無い時には、第１固有値（の近似値）しか求められない。　従って、教養部レベルの練習問題には、残念ながら殆ど役には立たない（大半が、統計学で扱う相関行列の如く素直な対称行列では無いのである）、。
評判の良い国産の数学ソフト「カルキング（最新は７版）」でも、標本分散共分散行列の固有値計算しか考慮しないので（文献２）、同じ悲嘆に出逢う。

さらに、電算プログラムの実例が、世間で多く使われているスカラー演算用の言語で書かれているものが多い。　他方、原理の解説は行列計算であるから、どうも、ちぐはぐの愁いあり、しっくりしない。　されど、行列演算の雄である我がＡＰＬやＪ言語でのプログラムの例は、筆者の怠慢・無知のせいか？　鈴木先生（文献１）以外には余り見かけ無いように思われる。　いずれ、VRCTOR誌のバックナンバーでも眺めよう。

これらの間隙を埋めるべく、筆者は若干の試みをしたので、御参考に供し、また、会友諸賢から御教示を賜りたいと存じます。

１．　直　接　法

周知の如く、連立方程式　ＡＸ　＝　λX　の trivial な解は　Ｘ＝０ であるが、０　ではない、Non-trivial な　解の条件は

$$\det|\ A - \lambda\cdot I\ | = 0$$

である。　ここに、Ａ　は係数行列、Ｉ　は単位行列である。
上式を　（行列式の形の）固有方程式、 λラムダ を固有値と呼ぶ。

この式を λについて展開し、その多項式を代数方程式と見て、解を求める。
これが、固有値問題のズバリ、の直接法である。　理屈は一番判り易い。
教養部レベルの数学教科書の解説及び演習問題はこれで解ける。（文献３、４）

（私の以下の解説ではギリシャ文字 λの代わりに、印刷の都合上、ローマ字　x　を用いる事が多いかも知れぬ。　御了承下さい。）

例１）　行列　Ａ＝ ｜3 2｜　固有多項式　ｄｅｔ｜3 - x　 2 ｜ ＝ 0
｜4 1｜、　｜ 4　1 - x｜

固有値 x　について展開し、

(3・1 - 2・4) - (3 + 1)・x　+ x ^ 2 ＝ 0

多項式の係数のみで示せば、Ｊ言語的に　coef=.　_5, _4, 1　である。
これを方程式と見た根は、Ｊ言語の演算　p. coef から　5 と　_1　を得る。

例２）一般的に　行列　Ａ＝ ｜a11 a12｜
｜a21 a22｜　の時には、必要な係数

((a11*a22)-a12*a21), -(a11+a22), 1

について、２次方程式の根を求めれる事になる。

例３）　行列　Ａ＝　｜a11 a12 a13｜　の時、一般的に
｜a21 a22 a23｜　解くべき固有方程式は
｜a31 a32 a33｜　係数のみで示せば

(-a11*a22*a33) +(a11*a23*a32)+(a21*a12*a33)+(-a21* a13*a32)+(-a31*a12*a23)+
(a31* a13*a22),
(b11*b22) + (b11*b33) + (b22*b33) + (-b21*b12)+(-b31*b13) + (-b32*b23),
(-(a11 + a22 + a33)), 1

しかし、行列のサイズが　２ｘ２　とか　３ｘ３　までなら良いが、４ｘ４　以上では代数方程式そのものを作るのは簡単でない。　very complicated とまで書いた外国の資料まである（文献５）。　Do it yourself!
市販の数学ソフト、例えば Ｍａｐｌｅ　を用いて、係数の計算を試みると、４ｘ４の場合には、結果の印刷に、Ａ４版用紙１枚が必要であった。　その次の５ｘ５の場合には何と、大幅増の６枚を要した。　教養部の数学テキストの固有値の演習問題が、３ｘ３の場合止まりで、それ以上の例を殆ど見ない訳だ。　著者が正解を作るのが大変だと云うのも理由になるか？

では、どうするか？　戸川隼人氏の本（文献６ p.84）では、「行列式の計算をしないでも代数方程式の形にする方法がある。」として、その名前だけを挙げてある。
ダニレフスキー　Danievski法と云うそうだ。
しかし、筆者の探索した限りでは、その中味に言及した資料は見つからぬ。　せっぱつまって、インターネットの　質問箱に質問を投書したけれども、未だ反応は皆無である。　大体、閲覧者数ですら、未だに　０ とは！　誰も見てくれぬ！
フリー百科事典の Wikipedia その他、あちこち検索したら、何と、ダニ ＋レフ ＋スキーと、３部分に分解・結合した記事に出食わしたのにはビックリ、情報化社会のレベル の実態を見たような、奇妙な気分にさせられた。
しかし、筆者は、その後、この難関を突破出来たように思うので、この稿に及んだ次第である。　多分、ダニレフスキー氏はこうしたであろうと思われるが、確認のしようが

無いので、新しいと云う意味と筆者「中野」のイニシアルの" N" を込めて、ネフスキー法とでも仮称しようか？　多少、おふざけであるか？

原稿が殆ど完成した後に、北大予科以来同期の畏友で北大名誉教授の小田島晟氏と **FAX** チャットの結果、辛うじて岩波数学事典第３版 **130D.**の「固有値の数値計算法」の中に、簡単に見えるのみだ！　と知らされた。　（文献８）

２．　中野　の　ネフスキー法

新法の意味である。
固有多項式の係数を整理し直して見ると、行列が

●　２ x ２の場合　　　　**1, - Trace(A), det(A)**　となる。
固有値 λの　２乗からの 降べき順 に係数を示してある。
ここに **Trace(A)** は 行列の対角要素の和であり、 **det(A)** は行列式である。
最高次の係数は １ として良い。 かくて、行列要素を全て書き出さずとも用は足りる。

●　３ x ３の場合　　　　**1, -Trace(A), de1 , -det(A)**
ここで、 **de1** は、固有値 λの１次の項の係数である。　それ以外の３項は、前例の如くして、自明的であり、行列要素を書き出す必要は無い。
新しい項は、前節　１．の 例３）の展開式　**(b23*b32) etc** から推測出来るように

de1 =. d11 + d22 + d33

ただし、　**d11 =. det ((1,1) minor A)**　ここに **minor** は **(1,1)** 要素の小、余行列。
d22 =. det ((2,2) minor A)　　　**(2,2)**
d33 =. det ((3,3) minor A)　　　**(3,3)**

この項の計算は簡単であり、この **det1** を **mdet (minor determinant)** と呼ぼう。
固有値 λのベキ乗の高次から降べきの、各項の内容は、

λ＾３	λ＾２	λ＾１	λ＾０
1	**3**項の和	**6**項の和	**6**項の和
1	**Trace**	**mdet**	**det**

●　４ x ４の場合　　行列を　Ｂ（**b11 etc**）　として、結果は
λ＾４　から　最低次の λ＾０　へ向かって書けば、

	1,	**Trace(B),**	**de2,**	**mdet(B),**	**det(B)**	
内容の項数は	**1**	**4**項	**12**項	**24** 項	**24** 項	である。

新しい　２次の項　**de2** 以外は、それ以前の事柄から推測出来よう。
例えば、今度の １次の項　**mdet**　には　**det ((4,4) minor B)** が追加されるだけ。

では、　**de2** は

de2 =. (b11*(b22+b33+b44)) + (b22*(b33+b44)) + (b33*b44)
de2 =. de2 + (-b12*b21) + (-b13*b31) + (-b14*b41)　　クロス項はマイナス
de2 =. de2 + (-b23*b32) + (-b24*b42) + (-b34*b43)　　〃

新しく追加する **de2** は、僅かに ６項の２倍の **12** 項であるから、行列要素を書き出しても簡単である。

●　５ x ５の場合　　行列を　Ｃ（**c11, etc**）　として、λ＾５　からの降べき順に

	1,	**(-Trace(C)),**	**de3,**	**(-de2),**	**mdet,**	**(-det(C))**
項数は	**1**	**5** 項	**20** 項	**60** 項	**120** 項	**120** 項

mdet には、今度は　**det ((5,5) minor C)** が追加されるだけで、計算は簡単。
新しい ３次項は　**de3 =. p31 + p32 + p33 + p34**

p31 =. (c11*(c22+c33+c44+c55))+(-c12*c21)+(-c13*c31)+(-c14*c41)+(-c15*c51)
p32 =. (c22*(c33+c44+c55) + (-c23*c32) + (-c24*c42) + (-c25*c52)
p33 =. (c33*(c44 + c55)) + (-c34*c43) + (-c35*c53)
p34 =. (c44*c55) + (-c45*c54)　の　２０項の和である。

ここまでは簡単だが、新しい２次項　**de2** は ６０項 の和で、些か、長大である。

de2 =. +/p21,p22,p23,p24,p25,p26,p27,p28,p29, p2a,p2b,p2c,p2d,p2e,p2f

ここに

```
p21=.(-c11)*((c22*(c33+c44+c55))+(-c23*c32)+(-c24*c42)+(-c25*c52))
p22=.(-c11)*((c33*(c44+c55))+(-c34*c43)+(-c35*c53))
p23=.(-c11)*((c44*c55)+(-c45*c54))
p24=.(-c22)*((c33*(c44+c55))+(-c34*c43)+(-c35*c53))
p25=.(-c22)*((c44*c55)+(-c45*c54))
p26=.(-c33)*((c44*c55)+(-c45*c54))
p27=.  c21*(((c12*(c33+c44+c55)) + (-c13*c32) + (-c14*c41) + (-c15*c52)))
p28=.  c31*(((c13*(c22+c44+c55)) + (-c12*c23) + (-c14*c43) + (-c15*c53)))
p29=.  c41*(((c14*(c22+c33+c55)) + (-c12*c24) + (-c13*c34) + (-c15*c54)))
p2a=.  c51*(((c15*(c22+c33+c44)) + (-c12*c25) + (-c13*c35) + (-c14*c54)))
p2b=.  c32*(((c33*(c44+c55)) + (-c24*c43) + (-c25*c53)))
p2c=.  c42*(((c24*(c33+c55)) + (-c23*c34) + (-c25*c54)))
p2d=.  c52*(((c25*(c33+c44)) + (-c23*c35) + (-c24*c45)))
p2e=.  c43*((c34*c55) + (-c35*c54))
p2f=.  c53*((c35*c44) + (-c34*c45))
```

なんとか書き出す事が出来る。

●　６ｘ６　の場合も、上記の素直な拡張として、書き下す事は出来ようが、多少の工夫・改良は当然必要であろう。
内容的には、固有値の降べき順に

	1	**Trace**	**de4**	**de3**	**de2**	**mdet(6)**	**det(6)**
項数で	**1**	**6**	**30**	**120**	**360**	**720**	**720**

この　両端近くの　**1, trace, mdet, det** は容易であるが、中央の　３件は、努力目標である。

一般に　ｎ次の場合、項数は逐次に　順列の公式　**P(n,r) = n! / (n-r)!** を用い
r=　　0　1　2　3　4　5　5 等で
算出出来る。

これら固有多項式の各係数が判れば、それを逆順に転置して、Ｊ言語の算法　ｐ.　を用い、求根すれば、固有値は得られる。
これらをＪ言語でコーディングする事は容易であるので、後掲するが、関数名では **eigen2, eigen3, eigen4, eigen5, eigen6** 等々　と呼ぼう。

いわゆる直接法であるが、この新法（？）をニックネイム的にネフスキー法（中野法としたいが）とでも呼ぼう。

３．　ｅｉｇｅｎ　諸関数の利用例

実例によって有効性を示そう。

●　２次　行列例：　戸川隼人「数値計算入門」（文献６）**p.85** より

ｍ２ ＝ ｜３ ２｜ では、演算 **eigen2 m2** より
｜４ １｜

固有多項式の係数（逆順、昇べき順に）は **_5 _4 1**

固有値は **5 _1** を得る。

比較の為に、鈴木先生（文献１ **p.128**）の例に出て來る方法でやれば

演算 **mev m2** から最大固有値は **6.5**

mev red m2 から 次の固有値は殆ど ０ **(8.88e-16)** であった。

この食い違いは、「非対称行列」でも可である方法（直接法）か「対称行列」に限定（例えば **Jakobi**法？）に依る。

その証拠を示す。 鈴木先生の相関行列データ **R =. corm STYLE** （文献１ **p.132**）の左上隅部分の ２ｘ２行列 データ を **r2** として

鈴木流 **2 evs r2** からの固有値は **1.54249, 0.457506** であるが、直接法の

中野流（ネフスキー？）では **eigen2 r2** から 固有多項式の係数は

0.7057 _2 1 で、固有値は **1.54249, 0.457506** と、両者は一致する。

● ３次行列例：有名な **Cayley-Hamilton** の定理に関係して、北海道の社会・経済系の大学教養部で多用される教科書（文献４ **p.169**）にあった。

｜１ ２ ２｜

ｍ３ ＝ ｜２ ０ ０｜、 演算 **eigen3 m3** より

｜２ １ _１｜ 固有多項式係数 **_8 _9 0 1**

固有値 **3.37...., _2.37....., _1**

● ４次行列：戸川隼人氏の線形計算ハンドブック（文献９）の末尾・付録「テスト行列」中の著名問題「固有値のわかっている問題」から **p.152** の **Bodewig** の例題

｜２ １ ３ ４｜

Ａ２７ ＝ ｜１ _３ １ ５｜、 演算 **eigen4 A27** より

｜３ １ ６ _２｜ 固有多項式係数

｜４ ５ _２ _１｜ **568 260 _73 _4 1**

固有値は **_8.02858 7.9329 5.66886 _1.57319**

このうち、固有値の最後は、戸川著では符号が 正である点が異なる。

このテスト行列は「対称」であるから、鈴木先生著内の関数が使える。

演算 **4 evs A27** による検算結果は、中野演算と一致した。

従って、戸川著内のものはミスプリントと確信出来た。

●５次行列：高次の例題は少ない。 ３次の例で引用したテキスト内に好例があった。

（文献４ **p.172** 例２のＢ行列）

｜ ２ ０ ０ １ １｜

｜ ０ ２ ０ ０ ０｜、 演算 **eigen5 mp172r2b** から

mp172r2b ＝ ｜ ３ ２ ０ ０ ０｜

｜ ０ _１ ０ ３ ０｜ 固有多項式係数は

｜_１ １ １ ０ ０｜ **_18 21 _20 17 _7 1**

固有値は **3 2 2.17456 _0.0872797j1.17131 _0.0872797j_1.17131**

実は、固有多項式は因数分解出来て

(λ - 3)(λ - 2)(λ^3 - 2*λ^2 + λ - 3) なのである。

●６次行列：前項３次と同じ（文献４、**p.173**、問１、**vi)**）の問題であるが

｜ ０ １ ０ ０ ０ ０｜

｜_２ ０ １ １ ０ ３｜

｜ １ １ ０ ０ ０ _１｜、 演算

mp173tvi ＝　｜ 1 0 0 0 0 _1｜　　eigen6 mp173tvi　から
｜_1 0 4 2 _1 1｜　　固有多項式係数は
｜ 0 1 0 0 0 0｜　　0 0 0 _2 _2 1 1

固有値は　　1.41421　_1.41421　_1　0　0　0　である。

実は、固有多項式は因数分解出来て

(λ^3)(λ + 1)(λ^2 - 2) なのである。

●６次行列：前項４次と同じ（文献９、p.155）の例題　(Lotkin行列）　であるが、原データが分数　(1/3,　1/7, 1/9,　1/11の類）である面白い例である。

Ｊ言語では分数を小数６桁（単精度）で入力せねばならなかった。　誤差は覚悟だ。
入力データをＪ言語的に書く。

```
   a33=: , 0 ". ] ;._2 (0 : 0)
1        1         1        1        1        1
0.5      0.333333  0.25     0.2      0.166667 0.142857
0.333333 0.25      0.2      0.166667 0.142857 0.125
0.25     0.2       0.166667 0.142857 0.125    0.111111
0.2      0.166667  0.142857 0.125    0.111111 0.1
0.166667 0.142857  0.125    0.111111 0.1      0.090901
    A33 =:  6 6 $ a33
```

演算は　　eigen6　A33

固有多項式係数は

_2.75577e_16　_2.71059e_10　_1.38549e_5　_0.015526　_0.688828　_1.8782　1

固有値は：　比較の為、（　）内に Lotkin が示した値をも示す。

2.19521	_0.292929	_0.023151
(2.132376)	(-0.2214068)	(-0.03184330)
_0.000909824	_1.89287e_5	_1.07487e_6
(-0.0008983233)	(-1.706278e_5)	(-1.394499e_7)

原著者 Lotkin の値との一致はかなりのものであろうか。

４．　む　す　び

固有値問題の解法で、直接法のメリットを述べた。
より詳しい議論の発展は次回以降とする。　末尾（文献の後）に、関係する Ｊ 言語によるプログラム等をまとめて置いた。　今後の激励と御叱正を乞う。

文　　献

１）鈴木義一郎著「Ｊ言語による統計分析」森北出版、1996.10 第１版第１刷 pp. 119-135

２）「カルキング７　ユーザーズガイド」（株）シンプレックス、2005.12 初版 pp.374-379

３）矢野健太郎・石原　繁著「科学技術者のための基礎数学（新版）」裳華房 1983 新版第２６版、pp.219-223

４）沼田　久・河口敏子・行方常幸・林善之・森本　仁・山本隆範　著「経済・社会・工学・農学系のための線形数学（改訂）」富士書院、1991 改訂２刷、pp.159-173

５）E. W. Weisstein: "CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICS (2nd edition)"

Chapman & Hall/CRC 2003, Eigenvalue p. 855r
6）計算技法シリーズ　　戸川隼人「数値計算入門」オーム社、昭和４５年、第１版
7）情報処理入門コース７　戸川隼人「数値計算」岩波書店、**1991** 第１刷
8）小田島**FAX (2007.Apr.20.14:00)** 固有値の数値計算法
岩波数学辞典　第３版　**130 D.**
9）　**J.R.** ウエストレイク著・戸川隼人 訳「コンピュータのための線形計算ハンドブック」培風館、昭和４７年**(1972)** 初版

固有値問題　プログラム　　Ｊ６０１

```
    NB. 2007 Apr. 22 (Sun)
NB. 2007 Apr 18 (Wed) pm.3:00
NB. eigen
    wr=:1!:2&2
    indot=: +/ . *
    det=: -/ . *
    outdot=: */
    polymult=: +//.@(*/)

    unitm=: 3 : '(i.y)=/i.y'
    trace=: 3 : 0
   NB.  :
      x=. 0{$ y
     +/ ((1+x)* (i.x)){ ,y
    )

     OR=: 3 : 0
      :
       0< x + y
     )

    AND=: 3 : 0
      :
       0< x *. y
     )

    NOT=: -.

     diag=: 3 : 0
      :
     uy=. unitm x
   NB.  wr  ' ans = '
    ans=.  (,uy) # ,y
     )

     ut=: 3 : 0
      uty=.(1#0), ((y-1) # 1)
      i=.2
     while. i <: y do.
    u0=.((i)#0),(y-i)# 1
     uty=. uty,u0
```

```
  i=.i+1
  end.
  uty=.  (y,y) $ uty
  )

  lt=: 3 : 0
|: ut y
  )

    utr=: 3 : '|. unitm  y'

  symmat=: 3 : 0
    un=. ut n=.0{$ y
    umn=.(|:um)+um=. y*un
    ud=.(n diag y)*(unitm n)
    umm=. umn + ud
  )
        omitr=: 3 : 0
        :
        (<<<x) {y
        )

      omitc=: 3 : 0
        :
        (<<<x) {"1 y
        )


minor=: 3 : 0
           :
           rx=.0{x
           cx=.1{x
           r=. rx-1
           c=. cx-1
         c omitc (r omitr y)
         )




 eigen2=: 3 : 0
        ny=. 0{ $ y
        tray=.+/ ny diag y
        dety=. det y
 wr   ans2=. dety,(-tray),1
        p. ans2
      )

 eigen3=: 3 : 0
        ny=. 0{ $ y
        tray=.+/ ny diag y
        dety=. det y
```

```
     wr   d11=.det (1,1) minor y
     wr   d22=.det (2,2) minor y
     wr   d33=.det (3,3) minor y
     wr   mdet=. +/ d11 , d22 , d33
     wr   ans3=.(-dety), mdet,(-tray) , 1
        p. ans3
      )


        eigen4=: 3 : 0
        ny=. 0{ $ y
        tray=.+/ ny diag y
        dety=. det y

    da1=. det a1=. (1,1) minor y
    da2=. det a2=. (2,2) minor y
    da3=. det a3=. (3,3) minor y
    da4=. det a4=. (4,4) minor y
   mdet=.+/da1,da2,da3,da4

     da12=. det a12m=. (3,3) minor a4
     da13=. det a13m=. (2,2) minor a4
     da14=. det a14m=. (2,2) minor a3
     da23=. det a23m=. (1,1) minor a4
     da24=. det a24m=. (1,1) minor a3
     da34=. det a34m=. (1,1) minor a2
   d2=. +/ da12,da13,da14,da23,da24,da34

     wr   ans4=.(dety),(-mdet), d2, (-tray) , 1
        p. ans4
      )

       eigen5=: 3 : 0
        ny=. 0{ $ y
    wr    tray=.+/ndg=. ny diag y
    wr    dety=. det y

         c11=. 0{ ndg
         c22=. 1{ ndg
         c33=. 2{ ndg
         c44=. 3{ ndg
         c55=. 4{ ndg

     db1=. det b1=. (1,1) minor y
     db2=. det b2=. (2,2) minor y
     db3=. det b3=. (3,3) minor y
     db4=. det b4=. (4,4) minor y
     db5=. det b5=. (5,5) minor y
wr   mdet=.+/db1,db2,db3,db4,db5

     d54=. det b123m=. (4,4) minor b5
     d53=. det b124m=. (3,3) minor b5
     d52=. det b134m=. (2,2) minor b5
```

```
d51=. det b234m=. (1,1) minor b5
d43=. det b125m=. (3,3) minor b4
d42=. det b135m=. (2,2) minor b4
d41=. det b235m=. (1,1) minor b4
d32=. det b145m=. (2,2) minor b3
d31=. det b245m=. (1,1) minor b3
d21=. det b345m=. (1,1) minor b2

wr   d3=. +/ d54, d53,d52,d51, d43, d42,d41, d32,d31,d21

p21=.(c11*(c22+c33+c44+c55))
p22=.(c22*(c33+c44+c55))
p23=.(c33*(c44+c55))
p24=.(c44*c55)

p2m=. de2m=. +/,((ut 5)*y)*|:(lt 5)*y
wr  ' p2 = d2 ? =  '
wr   p2=.p21+p22+p23+p24-p2m

wr   ans5=.(-dety),(mdet),(-d3),(p2), (-tray) , 1
p. ans5
)

eigen6=: 3 : 0
ny=. 0{ $ y
wr   ' trace  &  det of y =  '
wr    tray=.+/ ndg=. ny diag y
wr    dety=. det y

dc1=. det c1=. (1,1) minor y
dc2=. det c2=. (2,2) minor y
dc3=. det c3=. (3,3) minor y
dc4=. det c4=. (4,4) minor y
dc5=. det c5=. (5,5) minor y
dc6=. det  c6=. (6,6) minor y
mdet=.+/dc1,dc2,dc3,dc4,dc5,dc6
wr ' mdet =  '
wr   mdet

c11=. 0{ ndg
c22=. 1{ ndg
c33=. 2{ ndg
c44=. 3{ ndg
c55=. 4{ ndg
c66=. 5{ ndg
p21=.(c11*(c22+c33+c44+c55+c66))
p22=.(c22*(c33+c44+c55+c66))
p23=.(c33*(c44+c55+c66))
p24=.(c44*(c55+c66))
p25=.(c55*c66)
p2m=. de2m=. +/,((ut 6)*y)*|:(lt 6)*y
wr  ' p2 = '
wr   p2=.p21+p22+p23+p24+p25 -p2m
```

```
  d65=. det c1234m=.c65=. (5,5) minor c6
  d64=. det c1235m=.c64=. (4,4) minor c6
  d54=. det c1236m=.c54=. (4,4) minor c5
  d63=. det c1245m=.c63=. (3,3) minor c6
  d53=. det c1246m=.c53=. (3,3) minor c5
  d43=. det c1256m=.c43=. (3,3) minor c4
  d62=. det c1345m=.c62=. (2,2) minor c6
  d52=. det c1346m=.c52=. (2,2) minor c5
      b5=. c65
      b4=. c64
      b3=. c63

  d42=. det c1356m=.c42=. (2,2) minor c4
  d32=. det c1456m=.c32=. (2,2) minor c3
  d61=. det c2345m=.c61=. (1,1) minor c6
  d51=. det c2346m=.c51=. (1,1) minor c5
  d41=. det c2356m=.c41=. (1,1) minor c4
  d31=. det c2456m=.c31=. (1,1) minor c3
  d21=. det c3456m=.c21=. (1,1) minor c2

 d4=.+/(d65,d64,d63,d62,d61,d54,d53,d52,d51,d43,d42,d41,d32,d31,d21)
    wr ' d4 =  '
    wr  d4

   d654=. det c654=.  (1,1) minor c32
   d653=. det c653=.  (1,1) minor c42
   d652=. det c652=.  (1,1) minor c43
   d651=. det c651=.  (2,2) minor c43
   d643=. det c643=.  (1,1) minor c52
   d642=. det c642=.  (1,1) minor c53
   d641=. det c641=.  (2,2) minor c53
   d632=. det c632=.  (1,1) minor c54
   d631=. det c631=.  (2,2) minor c54
   d621=. det c621=.  (3,3) minor c54
   d543=. det c543=.  (1,1) minor c62
   d542=. det c542=.  (1,1) minor c63
   d541=. det c541=.  (2,2) minor c63
   d532=. det c532=.  (1,1) minor c64
   d531=. det c531=.  (2,2) minor c64
   d521=. det c521=.  (3,3) minor c64
   d432=. det c432=.  (1,1) minor c65
   d431=. det c431=.  (2,2) minor c65
   d421=. det c421=.  (3,3) minor c65
   d321=. det c321=.  (4,4) minor c65

 d3=.   +/(d654,d653,d652,d651,d643,d642,d641,d632,d631,d621)
  d3=.d3+ (+/d543,d542,d541,d532,d531,d521,d432,d431,d421,d321)
   wr ' d3 =   '
   wr   d3

wr   ans6=.(dety),(-mdet),(d4),(-d3) , (p2),  (-tray) , 1
     p. ans6
```

)