

J 言語 と 初等数学

ニュートン算 鶴亀算 サイコロ など

中野嘉弘 (84才・札幌市)

山下紀幸 (81才・横浜市)

FAX 専 011-588-3354
yoshihiro@river.ocn.ne.jp

TEL/FAX 045-851-3721

教育的な数学ソフトとして、J 言語 の有効さを試す意味で、中学・高校入試レベルの初等数学 をトライして見た。最近の入試問題の特徴は、問題数が大変多い事で、ほぼ2～3分間に1解答を書かされるペースなので、ロートルにはきつい作業である。数学ソフトの優劣も即解性を重視して評価すべきだろう。直解の難しい話は駄目かも？

は し が き

中・高生レベルの数学オリンピック IMO で、日本勢は、アジアでトップクラスとは残念ながら云えない。トップは中国、続いてインド、韓国、ベトナム、台湾などで日本は、インドネシアかマレーシア級との評価さえある。大体、5位以上に入った事が無いのだからアジアの指導者とは申せぬ。

最近の 2006 IMO スロベニア大会(旧ユーゴスラビア?)で、1位は中国、2位はロシア、3位は韓国で予想通り!、以下ドイツ、アメリカ、ルーマニアと続き、日本は7位で健闘したと云う。今年の2007 IMOはベトナムが予定される(文献0)。IMO出場者にフィールズ賞受賞者が目立つと云われる。

JAPLAの会友である仙台の橘川女史は、古くから、数学教育にAPLやJ言語を活用する事に貢献して来られた。橘川先生や北野利雄先生など、仙台勢を応援する意味で本稿を書く。出来れば、IMOの例題もJで処理してみたい。なお、IMOではロートルには「お懐かしい初等幾何学」の問題が極めて多い。これは、行列優先の、我ら APLer/J党 にとって盲点かも知れない。

最近、整数論に詳しい和田秀樹先生の「算数教室」なる企画ページを、日本のY紙上で見た(文献1)。「ニュートン算を学ぼう(1)」なる副題が興味をそそった。

先ず、第1問を紹介しよう。

「チケット売り場に50人が並んでいます。このチケット売り場は1分間で3人の客にチケットを売ることができます。一方、このチケットを買うために、1分間に1人ずつ人が並ぶとします。行列がなくなるのは何分後ですか？」

「増えたり減ったりする量が一定の割合の時、増減を同時に考えてみる」のが、即ちニュートン算である。ニュートン算は中国語では「牛頓」算と書く。中国北京の小学校の副教材「小学数学奥林匹克」に実際に「牛頓的”牛吃草”問題」とあるのを、あるウェブサイトで見つけた。

子供から突然「つるかめ算を教えて！」言われたら大抵の親は面食らうと思うが、

その「鶴亀算」の仲間である。

この同類には他に多くの仲間がある：

和差算、 差集め算、 過不足算、 年令算、 平均算、 つるかめ算、
倍数算、 のべ算、 分配算、 相当算、 仕事算、 消去算、
通過算、 時計算、 流水算、 旅人算、
植木算、 方陣算、 還元算、 ニュートン算 等々

その拡張も多く、「つるかめ算」から「たこ・いか算」や「むかで・かかし算」、
「かぶとむし・はと算」さらに「いもづる算」なども出来る。

これらを纏めて、「特殊算」と呼ぶ。

ニュートン算は、かの Sir Isaac Newton の名著「プリンシピア」に既に登場して
いるとのインターネット・ウェブ情報もあるが！ はてさて？（末尾付録）

解き方は千差万別で、上の第1問ならば、我が老妻は「暗算」で即解したし、我ら
JAPLAの老友・山下紀幸氏は「算術は代数より面白い！」と云う。

実際の中学入試例では、更に難しい問題が多く、インターネットのあるホームページ
の例（甲陽学院中学校 2001年度）では「高度な つるかめ算」に対し、22通りもの
解答例が寄せられていた。おまけに、有名なハンガリーの数学者ペーター・フランクル
の解説付きであった。

かくては、我がJAPLAの話題となり得るのに充分であろう。

最近の入試問題には、サイコロを使った確率の問題が散見されるので、追加した。

I ニュートン（牛頓）算

1. ニュートン算・第1問の解

（統報を顧慮すれば第1問よりは Y紙の第1-1問と云うべきか？）

解1) 中野貞枝の暗算： $50\% \times 2 \rightarrow 25$ Ans. 25分

解2) 山下紀幸氏の解 a：各1分間の最初に1人並ぶとすると

$$(50+1)\% \times (3-1) \rightarrow 25.5 \text{ 分}$$

同 解 b：各1分間の最後に1人並ぶとすると

$$50\% \times (3-1) + 1/3 \rightarrow 25\frac{1}{3} \text{ 分}$$

解3) 著者・中野嘉弘の解 a： x 分 で終わったとすると

$$50 + 1 \cdot x = 3 \cdot x$$

$$50 = 2 \cdot x$$

$$x = 50\% \times 2 \rightarrow 25 \text{ 分}$$

解4) 著者・中野嘉弘の解 b（グラフィカル a）：`J504b load 'plot'` の下で

```
dt=(0,0),(25,0),(0,50),(25,75),(0,50),(25,_25),(0,50),(25,0)
```

```
dat=.8 2 $ dt
```

```
0{"1 dat
```

```
0 25 0 25 0 25 0 25
```

```
1{"1 dat
```

```
0 0 50 75 50 _25 50 0
```

```
plot (,0{"1 dat); 1{"1 dat
```

グラフの右下がり直線が x 軸を切る点
が、 $x = 25$ （解）

※ グラフの実際の例示は、電子版作成の都合上、末尾に掲げてある。

解5) 著者・中野嘉弘の解 b (グラフィカル b) : J504b load 'plot' の下で

```
xa=.42$0.25
ybcd=.42$0.050.75.50_25.50.0
'line' plot xa ; ybcd
```

グラフの3直線が色別になるので便利

2. ニュートン算・第2問の解

第2問は(続報を考えれば Y紙の第1-2問と云うべきか)
「チケット売り場に81人の行列ができています。チケット売り場は1分間に4人の客にチケットを売ることができます。しかし、チケットを買いたい人が続々とやってきたので、行列がなくなるまでに27分かかりました。さて、最初の行列から人が何人増えたのでしょうか?」

解1) 山下紀幸氏の解(文献3) a :

81人にチケットを売る時間は $21/4 = 20.25$ 分で、
 $27 - 20.25 = 6.75$ 分が後から来た人に売る時間である。
だから $4 \times 6.75 = 27$ 人が答。

解2) 山下紀幸氏の解(文献3) b :

27分で売れる枚数は $27 \times 4 = 108$ 枚。 $108 - 81 = 27$ (人) が解

解3) 山下紀幸氏の解(文献3) c :

1次方程式(未知数 x 人) $(81 + x)/4 = 27$ より $x = 4 \times 27 - 81 = 27$

解4) 山下紀幸氏の解(文献3) d : 解1の検算 $4 \times 27 - 81 = 27$

解5) 著者・中野嘉弘の解(グラフ的に) : J504b の下で

人の増加の式 $81 + m \cdot t$ (m 人/分、 t 分)

人の減少の式 $81 - 4 \cdot t$ (4人/分)

正味の変化の式 $81 - (4 - m) \cdot t$

t = 27 で 人数列は 0 となる。

$81 - (4 - m) \cdot 27 = 0$ より $m \cdot 27 = 4 \cdot 27 - 81 = (4 - 3) \cdot 27 = 27$ 人

(なお、ついでながら m の値は 1 と求められる)。

解6) 著者・中野嘉弘の解(プログラム) : J504b の下で

プログラム

```
wr=: 1!:2&2
```

```
nx=: i.50
```

```
NB. x. = '81 + x.', y. = '4*27'
```

```
newton =: 3 : 0
```

```
x=. x.
```

```
y=. y.
```

```
im=. $ nx
```

```
i=. 0
```

```
while. i < im do.
```

```
xi=. i{nx
```

```
if. ('. x) = ". y do. wr 'ans= ', ": xi
```

```
goto label_1. end.
```

```
i=. i+1
```

```
end.
label_1. 'end newton !'
)
```

実行

```
'81+ x' newton '4*27'
ans= 27
end newton !
```

解 27人

(別例 第1問ならば '50 + x' newton '3*x' から ans= 25、 解 25分)

3. ニュートン算・第3問 と その 解

from 山下FAX (文献4)、(文献5)

「公園にいつも水が溢れている池がある。この池はいつも同じ量の水が底から湧き出しているので、全部の水を汲み出すのに、ポンプ8台では30分かかり、ポンプ16台では14分かかります。この池の水を10分間で全部汲み出すには、何台のポンプが要りますか？ ただし、ポンプはどれも同じ性能で、故障は無しとします。」
(滝川中学 入試)

解答例は原著(中村義作著の文献5)にある。中野の別解の方を例示する。

解1) 中野嘉弘の解a (グラフ的) 池全体の水量を 1 とする。
池底からの湧出水の式 $y_0 = 1 + m \cdot t$ (m /分、t分)
ポンプでの汲み出し 8台 $y_8 = 1 - (8 \cdot a - m) \cdot t$ (a ポンプ1台当たり/分)
16台 $y_{16} = 1 - (16 \cdot a - m) \cdot t$
x台 $y = 1 - (x \cdot a - m) \cdot 10$

式 y_8 より、汲み出し完了は $0 = 1 + (m - 8 \cdot a) \cdot 30$ (1)

式 y_{16} より、汲み出し完了は $0 = 1 + (m - 16 \cdot a) \cdot 14$ (2)

連立方程式 (2)-(1)を整理して $m = a \cdot (15 - 14) = a$
湧出/分 ポンプ1台/分

式(1) に代入して $a = 1 / 30 \cdot 7 = 1 / 210$

x台の式より $0 = 1 - a \cdot (x - 1) \cdot 10$

$$x - 1 = 21 \rightarrow x = 22$$

解 ポンプ 22 台 (10分間で完了)

4. ニュートン算・第4問 と その 解

Y紙の第2報からである(文献6)。難しくなった。

第4問 (Y紙の第2-1問) 「チケット売り場に50人の行列が出来ています。この行列は毎分1人のペースで増えていきます。売り場が1つのとき、50分で行列がなくなりました。さて、売り場を3つに増やしたとき、行列がなくなるのは何分後でしょうか？ ただし、どのチケット売り場も1分間にチケットを売ることができる人数は同じです。」

解1) 中野嘉弘の解 (グラフ的)

待ち行列の人数の増え方 $y_0 = 50 + 1 \cdot t$ (t は分単位)

売り場1ヶでしよれば、人数は $y_1 = 50 - (a-1)*t$ (a は処理人数/分)
 50 分で $y_1 = 0$ となるから $a = 2$ が得られる。
 売り場3ヶで処理すれば、人数は $y_3 = 50 - (3*a-1)*t$ (ただし $a = 2$)
 $y_3 = 0$ となるから $t = 10$ 解は 10 分後

解2) 山下紀幸氏の解 (算術的、文献7)

売り場が1つのとき、50分で行列がなくなるので、毎分のチケット処理枚数は
 $(50 + 50*1) \div 50 \rightarrow 2$ 枚。売り場が3つのとき、毎分の処理枚数は6枚。
 方程式 $50 + x = 6x$ より $x = 10$ 解は 10分。

5. ニュートン算・第5問 と その 解

Y紙の第2報からである (文献6)。難しくなった。

第5問 (Y紙の第2-2問) 「毎日一定の量で草が生える牧場があります。ここに牛を6頭放すと20日で、5頭放すと30日で牧草がなくなってしまいます。それでは、12日で牧草がなくなるには、牛を何頭放せばよいでしょうか? ただし、1頭の牛が1日に食べる草の量は、どの牛でも、どの日でも同じとします。」

解1) 中野嘉弘の解 (方程式的)

1頭の牛の食草/日 を 1 (単位) とする。
 6頭の牛の食草/日 は 6 (単位) となる。
 6頭の牛の食草 は 20日で 120 (単位) であり
 5頭の牛の食草 は 30日で 150 (単位) である。

また、元来の草の量 a 、草の1日当たりの生成量 b (/日) とする。

方程式化すれば

$$(a + b * 20) = 120 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(a + b * 30) = 150 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(2)-(1) \text{ より } b*10 = 30 \rightarrow b = 3$$

$$(1) \text{ より } a = 120 - 60 = 60$$

食い尽くす日数を t 、求める牛の頭数を x とすれば

$$a + b * t = x * t \quad \text{の関係式を得る。}$$

題意より、 $t = 12$ として

$$60 + 3 * 12 = x * 12$$

$$12 \text{ で割って } 5 + 3 = 8 = x \quad \text{から 解は } x = 8 \text{ 頭。}$$

解2) 山下紀幸氏の解 (連立方程式的、文献7) 殆ど同じ (掲載省略)

II. つ る か め 算

6. 第6問 つるかめ

山下紀幸FAXからの、少々ヒネタ問題である (文献9)

第6問 「ミカンと栗をそれぞれ買おうと合計100円と書かれたお店で、ミカンいくつかと、それより3個だけ多く栗を買ったところ、520円でした。ミカンの値段と買ったみかんの個数はいくらでしょうか?」 (問題2. 2. 7 文献10)

解1) 中野嘉弘の解 (苦心の解、どうも題意がよく判らんが!?)

ミカン1ケと栗1単位（何ケか不明）を組にした一皿盛りが100円と考える。
 先ず、それをx皿買ったとする。栗の1単位の値段をy円とし、3単位分を追加して
 買ったものとする。 合わせて520円であった。

関係式は $100 * x + 3 * y = 520$

この整数解を求めよ・・・が題意らしい。

試解 x = 5 では 3 * y = 20 で整数解は無し。

x = 4 では 3 * y = 120 で整数解は y = 40 栗1単位
 この時、組み合わせもミカンは 100 - 40 より 単価は 60円。
 購入したのは x個、即ち 4個 であった。

x = 3 または 2 では 整数解は無い。

x = 1 では 3 * y = 420 で整数解は y = 140 栗1単位
 この時、組み合わせもミカンは 100 - 140 より ミカン単価は負数。
 解は無い。

結局、購入した ミカン の単価は 60円で個数は 4個 であった。

※ 原問題表現と山下FAXの差異について問い合わせたが、差異は無い事である。
 また、その山下解も上記、中野解と同巧であった。

解2) 中野の解 (J言語流) NB. x= mikan kosuu, xp= mikan tanka
 NB. 100*x + 3*y = 520, y= kuri nedan < 100

```
x = .i5 = .1 + i.5
| y3 = .520 - 100 * x -> 420 320 220 120 20
| y = .(((3 | y3)=0) # y3)%3 -> 140 40
  (y < 100) # y -> 40 クリ値段
| xp = .100 - y -> 60 ミカン単価
| x = (.520 - 3 * y) % 100 -> 4 ミカン個数
(纏めて、殆ど1行でも処理出来る。 実はJ言語の特長である。)
```

7. 第7問 つるかめ

これも、 山下紀幸FAXからの、多少ヒネタ問題である (文献9)

第7問「1個5円の栗と1個9円の柿と1個17円の梨を合計24個買って268円
 払いました。 それぞれ何個ずつ買ったでしょうか？」 (問題2. 2. 8 文献10)

解1) 中野の解 (J言語で表現すれば)

買った栗、柿、梨の個数を x, y, z 個とする。

$x + y + z = 24$ (1)
 $5 * x + 9 * y + 17 * z = 268$ (2)

(2) - 5*(1) より $y + 3 * z = 37$ (3)

(3)式の自然数解を求めよう。

J言語で以下の如く、容易に解ける。

```
z = .i.13, y = .37 - 3 * z, x = .24 + (-y) + (-z)
| x6 = .(x > 0) # x
  1 3 5 7 9 11
                                y6 = ._6 { . y
                                z6 = ._6 { . z

| mxyz = .3 6 $ x6, y6, z6
```

解 1 3 5 7 9 11
 16 13 10 7 4 1

7 8 9 10 11 12

検算

$$\begin{aligned}
& +/{}^2 \text{ mxyz} \\
& 24 \ 24 \ 24 \ 24 \ 24 \ 24 \\
& ((0\{\text{mxyz}\} * 5) + (1\{\text{mxyz}\} * 9) + ((2\{\text{mxyz}\} * 17) \\
& 268 \ 268 \ 268 \ 268 \ 268 \ 268
\end{aligned}$$

I I I. サイコロ (確率)

- 最近、北海道の公立高校の入試問題を見た。 (文献 1 1)

【1】 次の問いに答えなさい。

問 4 右のような大小 2 つのサイコロを同時に投げるとき、出る目の積が 6 の倍数になる確率を求めなさい。

解 1) 中野の例解:

大		小
6	x	1 2 3 4 5 6
5		6
4		3 6
3		2 4 6
2		3 6
1		6

場合の数は 1 5 故、確率は 15 / 36 -> 5 / 12

※参考：入試配点は 3 点を与える。 答が既約分数でない場合は 2 点とする。
 (この種の間が全部で 1 9 問、5 0 分。 受験者の平均点は 6 0 点満点中、ほぼ 3 0 点。 1 問当たり、2 ~ 3 分以内で解答せよが高校入試の実態である！)

解 2) 中野の J 解 (J601)

$$\begin{aligned}
& |i6 = . >: i.6 \rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
& |d66 = . i6 * / i6 \rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
& \qquad \qquad \qquad 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \\
& \qquad \qquad \qquad 3 \ 6 \ 9 \ 12 \ 15 \ 18 \\
& \qquad \qquad \qquad 4 \ 8 \ 12 \ 16 \ 20 \ 24 \\
& \qquad \qquad \qquad 5 \ 10 \ 15 \ 20 \ 25 \ 30 \\
& \qquad \qquad \qquad 6 \ 12 \ 18 \ 24 \ 30 \ 36 \\
& (6 | d66) = 0 \rightarrow 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\
& \qquad \qquad \qquad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
& \qquad \qquad \qquad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\
& +/ (6 | d66) = 0 \rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 6 \\
& +/ +/ (6 | d66) = 0 \rightarrow 15 \quad \text{解 } 15/36 \rightarrow 5 / 1 \ 2
\end{aligned}$$

※ 難点は、J 解が 2 分程度で完了するか否か？ であろう。

- ◆ あるインターネット・ウェブ上を騒がせたサイコロの問題
「出題」 2 つのサイコロを同時に投げるとき両方とも 3 の出ない確率を求めよ。

※ 回答者は 9 人であった。「両方とも 3 の出ない」の意味の解釈でもめた！
 悪しき出題表現の標本かも知れぬ！
 「くだらんね」と悪態をついた人と、EXCELでも利用して「実験しよう」と
 云うた超真面目人間も居りました。

解 a) 答は $35/36$
 理由： 両方 3 がでる確率は $1/6 \times 1/6 = 1/36$ だから
 両方とも 3 の出ない確率は $1 - 1/36 = 35/36$

解 b) 答は $25/36$
 理由： サイコロの片方が、3 以外を出す確率は $5/6$
 他方が 3 以外を出す確率も $5/6$ で、互いに独立事象だから
 全体では $(5/6) \times (5/6) = 25/36$

解 c) サイコロの片方は 3 を出さず、他方は 3 を出しても、題意に叶うとする。
 即ち、「両方とも 3 を出した訳では無い」とする。
 その時の答は $35/36$ となる。
 理由： $(25/36) + (5/6) + (5/6) = 35/36$

解 d) 中野の J 言語による解 (数値実験 J601、目 3 を含むもの)

```

]dices36=. 2 36 $ >: ?72#6
1 4 4 4 2 1 3 6 2 1 .....5 1 1 6 3 2
1 5 1 2 4 5 4 3 4 3 .....3 3 3 1 3 5
(0{dice36}=3
0 0 0 0 0 1 0 0 0 .....0 0 0 0 1 0
(1{dice36}=3
0 0 0 0 0 0 1 0 1 .....1 1 1 0 1 0
+(((0{dice36}=3) + (1{dice36}=3) > 1
1      サイコロの目の組み合わせ (3,3) は      1 回 / 3 6 回
+(((0{dice36}=3) + (1{dice36}=3) > 0
10     サイコロの目の組み合わせ (3 を 1 ケ含む) は 1 0 回 / 3 6 回
    
```

従って、3 の目の出ない確率は
 2 ケのサイコロに全く出ない確率 $35/36$
 2 ケ共には出ない (1 ケは出るかも知れぬ) の確率 $26/36$
 前述の 解 c) と同様な結果となった。

IV. IMO の問題の J 言語 での処理例

国際数学オリンピック 2006 スロベニア大会 での例の中 問題 4 を選ぶ。

ドイツ語で云えば

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare (x,y) ganzer Zahlen, welche die folgende Gleichung erfullen:

$$1 + 2^x + 2^{(2^x+1)} = y^2 \quad (1)$$

中国語 (簡体字) で示せば

「四、求所有的整数对 (x,y) , 使得 (1) 」

解答時間は 6 問で 9 時間 (延べ 2 日) 故、1 問当たり 90 分見当、キツイな！

中野解 (J 言語も登場)

解 (x, y) は (0, 2)、(4, 23) 及び y の符号反対の 4 ケである。

1) x = 0 の時は (1) 式より $4 = y^2$ 故、 $y = \pm 2$ と直解出来る。

【J 言語】 $x = 0$

$$y^2 = 1 + (2^x) + 2^{(1+2^x)} \rightarrow 4$$

p. 4 0 1 \rightarrow 2 2 より、解は (0, 2) と (0, -2)。

2) $x < 0$ の場合は分数を含み、(1) 式の y に整数解は無いことは明か!

3) $x > 0$ の場合: $z = 2^x$ と置くと

$$1 + z + 2z^2 = y^2 \quad (2) \quad \text{となる。}$$

(2) 式より y の平方は奇数故、奇数の y が解。

【J 言語】 | $x = 1 + i.5 \rightarrow 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$

$$| z = 2^x \rightarrow 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 32$$

(2) の左辺 | $\text{left} = 1 + z*(1 + 2*z) \rightarrow 11 \ 37 \ 137 \ 529 \ 2081$

平方根 y %: $\text{left} \rightarrow 3.31.. \ 6.08.. \ 11.70.. \ 23 \ 45.61..$

整数解 (x, y) に (4, ± 23) が加わる。

4) これ以上に解があるか?

$$(2) \text{式を移項し} \quad z*(1 + 2*z) = (y-1)*(y+1) \quad (3)$$

または

$$(2^x) * (1 + 2^{(1+x)}) = (y-1) * (y+1) \quad (4)$$

数値計算

x	2^x	$(1 + 2^{(1+x)})$	$(y-1) * (y+1)$	y
1	2	$2^2 + 1$	10	no ans
2	4	$4*2 + 1$	36	no ans
3	8	$8*2 + 1$	136	no ans
◎4	$8*2$	$8*2*2 + 1$	528	23

ここで、解には (4, 23) と (4, -23) が追加された。

続いて

5	$8*4$	$8*4*2 + 1$	2080	
6	$8*8$	$8*8*2 + 1$	8256	

.....

さて、(3) 式の右辺の積 $(y-1)*(y+1)$ は、各 x に於いて、 $z = 2^x$ にて割り切れるが、個々の $(y-1)$ や $(y+1)$ の「割り切れ」は即断出来ぬ。しかし、解となる y は奇数であるから、相棒の因子は $(y \pm 1)$ は偶数であるので、 $z/2$ にては割切れる筈である。

従って $y \pm 1 = (z/2) * k$ と置ける。

当然ながら k は 0 でも 1 でも無く、また、偶数でも無い。k は奇数 > 1。

かくて原式移項の(3)式右辺は $y^2 - 1 = (z/2)^2 * (k^2) \pm z * k$

(3) の両辺の z を簡約すれば

$$(1 + 2 * z) = (z^2)/4 * (k^2) \pm k$$

かくて $(1 \pm k) = (z/4) * (k^2 - 2^x)$

左辺 - 号の時、左辺は負故、 $k^2 < 8$ から出る 1 以上の k の候補 2 は奇数ならず、従って「解無し」。

左辺 + 号の時 $1 + k > 2 * (k^2 - 8)$

$$2 * k^2 - k - 17 < 0$$

$$(k - 3.178..)*(k + 2.676..) < 0$$

ここで、 k は負数では無いから $0 < k < 3.178...$

故に、奇整数としては $k = 3$ のみが許される。

この時は上の数値計算表◎印に見る如く $x = 4$ である。

$x > 4$ に於ける議論： k と x の関係式は

$$4*(1+k)/(k^2 - 8) = z = 2^x \quad (5)$$

(5)の左辺は $k = 3$ で最高値 16 を持ち、それ例外の k では、そ 以下である。

(5)の右辺は $x = 4$ で同じ値 16 を持ち、それ以上では急速に増加する。従って、(5)式で等式が成立するのは $x = 4$ の場合以外には無い。対応する y の値は、平方で有意であるから、正、負が可能である。

纏めて、解 (x, y) は $(0, \pm 2)$ と $(4, \pm 23)$ の 4つ である。

【付 録】 ニュートン法の命名の起源

※ ニュートン法の命名の起源は、かの名著「プリンキピア」であろうか？
あるウェブサイトに、「プリンキピア」内に「牧牛の問題」として、既に存在したと書かれている。
「牧牛」は英語では **cattle at pasture** であろうか？

【原典】 Sir Isaac Newton: The PRINCIPIA (1687)

Philosophiae naturalis principia mathematica

(born Dec25, 1642 - died Mar20,1727)

American Edition 1995 pp.455, Prometheus Books Amherst, New York

(因縁： 北大ゆかりの クラーク先生の故郷が アマースト である。)

この英文中を調べたが、関係する単語は見当たらなかった。
見落としたつもりは無いが？

【邦訳】 S. チャンドラセカール著・中村誠太郎 監訳： チャンドラセカールの
「プリンキピア」講義 一般読者のために pp.579
講談社 1998.12.10 \12,000

大変、丁寧な好著であるが、やはり関係する単語は見当たらない。
主題は天体力学で、潮汐理論などもありもっともっと高級な話ばかりである。

【別件】 数学の大百科事典である大著 CRC Concise Encyclopedia of MATHEMATICA
Second Edition by Eric W. Weisstein pp.3242 (2005 Chapman & Hall/CRC)
内には、問題の "Cattle" の項目が見える。 Cattle Problem of Archimedes
である。 ニュートンには非ず、アルキメデスである。 この方が尤もらしい。
ただし、例題は、牡牛と牝牛があり、白牛、黒牛、斑牛、茶色牛が混じる。
連立方程式の解を求める類であって、草を食う話ではない。
これは、別名、「Bovinum の問題」とも呼ばれるが、今問題のニュートン法とは
直接の対応は無い。 数学史は面白いが難物である。

【ついに発見 1】 前記、アルキメデスの牧牛問題の参考文献として

" 100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution"

Heinrich Doerrie 1958 (Translated David Antin 1965, Dover 0-486-61345-8)

があった。 たまたま、中野の書棚にあったが、その第 1 話題が「アルキメデスの

牧牛問題 Archimedes' Problema Bovinum」で、第3話題がなんとまあ "Newton's Problem of Fields and Cows" であった。

それによれば、出典は、肝心のニュートンのプリンキピアでは無く、この Arithmetica universalis (1707) であって、 その中に

a cows graze b fields bare in c days,

.....

.....

で始まる面白い問題として取り上げられて居る。 ここで a, b, c は未知数である。

※ 日本評論社の数学誌・数学セミナーの昔の増刊号「数学100の問題」でもは、上記の問題の英文の訳とともに、詳しく解説しているが、上述の弟子の本 Arithmetica universalis に、「ニュートンの」と所有代名詞?を付けている。

【ついに発見2】近着の山下FAX ('07.3.11、文献13)によれば、ニュートン法の出典は、やはり、プリンキピアではなさそうです！ と。

森北出版刊の「数学者たちのチャレンジした問題」のp.71、21章、表題はなんと「農業におけるニュートンの数学の問題」に詳しい数学史を含む解説があった。

ニュートンの父はイングランド東海岸のウールズソープ村の小さな農地を、遺産として残した。ニュートンの母も農民の血筋であった。ニュートンの才能に気付いた近親者の援護で進学し、1669年、ケンブリッジ大学で名誉ある数学のルーカス教授職に就いた。その義務として、算術と代数の講義をした。当時の学生で、ニュートンの後継者となったウイストン (William Whiston 1667-1752) が、1707年、その講義を "Arithmetica universalis" と題して出版した。その中に、上記の「ニュートンの牧場の牧草」の問題があった。ニュートンには先祖の農業の記憶があったのだ！ と。

よく判る話だ。

文 献

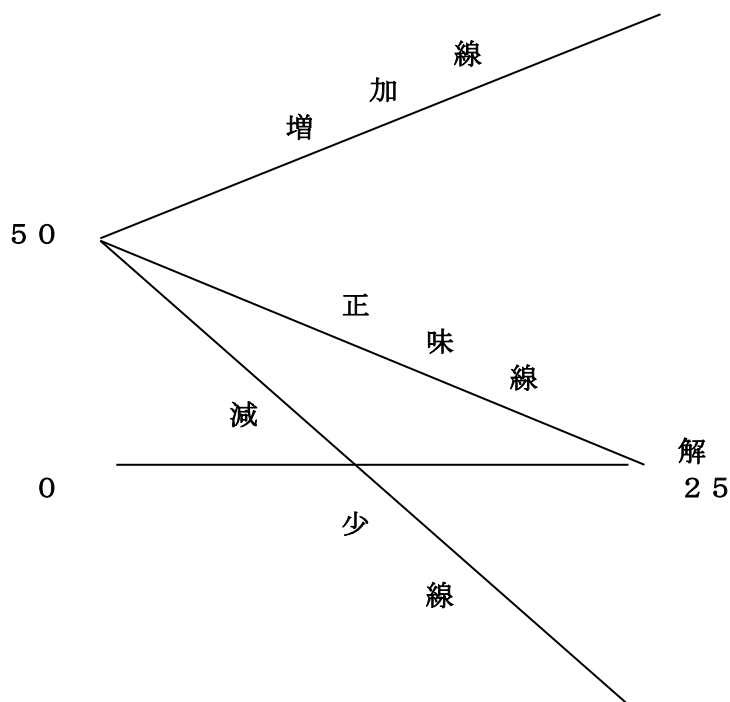
- 0) 「国際数学オリンピック スロベニア大会」数学セミナー誌 (日本評論社)
2006. 11 pp.50-54
- 1) 読売新聞 (北海道版) 2007年 (平成 19年) 2月 17日 (土) 夕刊 (6)
週間 KODOMO 新聞 「和田秀樹先生の算数教室」 問題作成協力 中野博明、
緑鉄受験指導ゼミナール、学力向上!親の会: 「ニュートン算を学ぼう (1)」
- 2) 山下FAX (2007-2-18): 牛頓算・第1問の解
- 3) 山下FAX (2007-2-19 15:00): 牛頓算・第2問の解
- 4) 山下FAX (2007-2-26 17:30): ブルーボックス (中村義作著) より
- 5) 中村義作「算数100の難問・奇問 2」講談社、ブルーボックス B-824、
1992.6.10 第7刷 pp.203-4
同様に 「難問・奇問」B-722、「難問・奇問 3」B-899、「難問・奇問 4」
B-1016 などもある。
- 6) 読売新聞 (北海道版) 2007年 (平成 19年) 3月 3日 (土) 夕刊 (6)
週間 KODOMO 新聞 「和田秀樹先生の算数教室」 問題作成協力 中野博明、
緑鉄受験指導ゼミナール、学力向上!親の会: 「ニュートン算を学ぼう (2)」
- 7) 山下FAX (2007-3-4 13:30): 牛頓算・第2-1問の解

- 8) 山下FAX (2007-3-4 13:30) : 牛頓算・第2-2問の解
 9) 山下FAX (2007-2-28 13:30) : つるかめ算・第1、2問
 10) 森北出版「日本の数学 何題解けますか」
 11) Y紙 (H19.3.7 pp.29-31) 「北海道公立高校入試問題と解答」
 数学 (19問、50分、60点満点)
 12) Heinrich Doerrie 1932 (Translated by David Antin 1965):
 "100 Great Problems of Elementary Mathematics
 Their History and Solution" Dover 0-486-61348-8
 13) 山下FAX (2007-3-11 17:50) : ニュートン法の出典はプリンキピアに非ず
 「数学者たちのチャレンジした問題」森北出版 ~p.76

グラフの実例

本文 p.2 I ニュートン (牛頓) 算 1. ニュートン算・第1問の解

解4) および 解5) に対応するグラフ



☆ 電子化レポートでは、WORD による作図で示した。

J 言語による図はスキャナー経由の為、媒体の記憶容量が増加し (図1ケ当たり数MB)、その為、その電子媒体の送付を諦めた。

乞う、良いお知恵を!