

エクゾチックオプション価格のシミュレーション その4 - パワーオプションの価格式 -

Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models - 4 - The Power Option Pricing Model

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

1. はじめに

前回はスプレッドオプションということで、挙動が幾何ブラウン運動ではない、やや異なったテーマをとりあげたが、今回は昨年度のシンポジウムで発表したプレーンバニラオプションを拡張した、行使価格を K^N としたパワーオプションについて述べ、 $N = 2$ のときのこれがプレーンバニラオプション_[1]の積分で表わせることも合わせて報告する。

2. パワーオプションの価格式

オプション満期 T におけるオプション価格を K としたとき、ペイオフを $\text{Max}\{S(T)^N - K^N, 0\}$ の期待値とするのがパワーオプションである。

$S(T)$ が幾何ブラウン運動に従い、 r をリスクフリーの金利としたとき、その変動が次の式で表わせるならば、

$$(1) \quad dS = rSdt + \sigma Sd\hat{z}$$

の仮定のもとで、

$$(2) \quad \frac{\ln \frac{S(T)}{S(t)} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1^2)$$

に従うことがわかる。この関係を用いてペイオフの期待値を計算する。

オプション満期 T におけるパワーオプションの価格 $S(T)$ の確率密度関数を $f(S(T))$ とすると、ペイオフは $\text{Max}\{S(T)^N - K^N, 0\}$ の期待値となるから、コールオプションの価格 C^* は、

$$(3) \quad C^* = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Max}\{S(T)^N - K^N, 0\} f(S(T)) dS(T) \\ = \int_K^{\infty} \{S(T)^N - K^N\} f(S(T)) dS(T)$$

(3) 式の 2 行目は Max をはずす為に、積分範囲を $(-\infty$ から $\infty)$ を $(K$ から $\infty)$ に変えたものである。ここで (2) から求めた次式の $S(T)$ 、および x_0 、を用いて

$$(4) \quad \begin{cases} S(T) = S(t)e^{x\sigma\sqrt{T-t} + (r - \sigma^2/2)(T-t)} \\ x_0 = \frac{\ln(K/S(t)) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases}$$

により (3) を書き直すと、

$$(5) \quad C^* = \int_{x_0}^{\infty} \left\{ \left(S(t)e^{x\sigma\sqrt{T-t} + (r - \sigma^2/2)(T-t)} \right)^N - K^N \right\} \phi(x) dx \\ = \int_{x_0}^{\infty} \left(S(t)^N e^{Nx\sigma\sqrt{T-t} + (r - \sigma^2/2)(T-t)} - K^N \right) \phi(x) dx \\ = S(t)^N \int_{x_0}^{\infty} e^{Nx\sigma\sqrt{T-t} + (r - \sigma^2/2)(T-t)} \phi(x) dx - K^N \int_{x_0}^{\infty} \phi(x) dx$$

ここで、 $\phi(x)$ は標準正規分布の密度関数である。

この式の第 1 項の被積分関数を密度関数の完全平方の形に直すと、

$$(6) \quad e^{Nx\sigma\sqrt{T-t}+(r-\sigma^2/2)(T-t)}\phi(x) = e^{N\{r+\frac{1}{2}(N-1)\sigma^2\}(T-t)}\phi(x - N\sigma\sqrt{T-t})$$

であるから、(5) 式は、

$$(7) \quad \begin{aligned} C^* &= S(t)^N \int_{x_0}^{\infty} e^{N\{r+\frac{1}{2}(N-1)\sigma^2\}(T-t)}\phi(x - N\sigma\sqrt{T-t})dx - K^N \int_{x_0}^{\infty} \phi(x)dx \\ &= S(t)^N e^{N\{r+\frac{1}{2}(N-1)\sigma^2\}(T-t)} \int_{x_0-N\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \phi(x)dx - K^N \int_{x_0}^{\infty} \phi(x)dx \\ &= S(t)^N e^{N\{r+\frac{1}{2}(N-1)\sigma^2\}(T-t)}\Phi(-x_0 + N\sigma\sqrt{T-t}) - K^N\Phi(-x_0) \end{aligned}$$

したがって、この現在価値をとることによりコールオプション価格 C を得る。

$$(8) \quad \begin{aligned} C &= C^*e^{-r(T-t)} = S(t)^N e^{\{(N-1)r+\frac{1}{2}N(N-1)\sigma^2\}(T-t)}\Phi(-x_0 + N\sigma\sqrt{T-t}) - K^N\Phi(-x_0) \\ &= S(t)^N e^{\{(N-1)r+\frac{1}{2}N(N-1)\sigma^2\}(T-t)}\Phi(d + N\sigma\sqrt{T-t}) - K^N\Phi(d) \end{aligned}$$

ここで d は、

$$(9) \quad d = -x_0 = \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

3 . $N = 2$ のときのパワーとプレインバニラのオプションの価格式との関係

$G(K)$ を $N = 2$ のときのパワーオプション価格式、 $H(K)$ をプレインバニラオプションの価格式とし、双方とも行使価格 K の関数とみなすことにする。

$$(10) \quad \begin{cases} G(K) : \text{Max}\{S(T)^2 - K^2, 0\} \text{ の期待値でパワーオプションの価格} \\ H(K) : \text{Max}\{S(T) - K, 0\} \text{ の期待値でプレインバニラオプションの価格} \end{cases}$$

$$(11) \quad G(K) = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} \{S(T)^2 - K^2\}f(S(T))dS(T)$$

を K で微分すると、

$$(12) \quad \begin{aligned} G'(K) &= e^{-r(T-t)} \left\{ -K^2f(K) - 2K \int_K^{\infty} f(S(T))dS(T) + K^2f(K) \right\} \\ &= -2e^{-r(T-t)}K \int_K^{\infty} f(S(T))dS(T) \end{aligned}$$

一方、プレインバニラオプションでは、

$$(13) \quad H(K) = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} \{S(T) - K\}f(S(T))dS(T)$$

を K で微分すると、

$$(14) \quad \begin{aligned} H'(K) &= e^{-r(T-t)} \left\{ -Kf(K) - \int_K^{\infty} f(S(T))dS(T) + Kf(K) \right\} \\ &= -e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} f(S(T))dS(T) \end{aligned}$$

この関係から次式を得る。

$$(15) \quad G'(K) = 2K \cdot H'(K)$$

そこでこれを積分することにより、次の関係式を求めることが出来る。

$$(16) \quad \begin{aligned} G(K) &= - \int_K^{\infty} G'(x)dx = - \int_K^{\infty} 2x \cdot H'(x)dx \\ &= - \left\{ [2x \cdot H(x)]_K^{\infty} - \int_K^{\infty} 2H(x)dx \right\} \\ &= 2K \cdot H(K) + 2 \int_K^{\infty} H(x)dx \end{aligned}$$

すなわち、 $N = 2$ のパワーオプションの価格は、プレインバニラオプション価格に加えて、それら行使価格 K 以上のものを加算したのから得られることを示している。

4 . パワーオプションのプライシングの J プログラム

2006年12月のシンポジウム_[2]ではJ503の関数リストを掲載したが、ここではJ601バージョンで関数を作成した。大きな違いはこれまでのJでは左右の引数をx, y. を用いていたが、601以降はピリオドを使わず、左右の引数はx yを用いるようにした。また、Jの関数における引数表現を少し変更してみた。

まず、前回のJプログラムのJ601版である。

```

NB. =====
NB. Normal Distribution : High Precision
NB. Ndist(u)=NP(u>0)=Phi(u)=1-NQ(u>0)
NB. =====
stnormal=(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
NB. When u>0 is small
NP=:3 : 0
(stnormal y)*y%(-'%+'%),(>:+:k),.(*:y)*>:k=.i.28
)
NB. When u>0 is large
NQ=:3 : 0
(stnormal y)*%'+/1,,y ,.>:i.28
)
NB. Standard Normal Distribution Function Phi(u)
Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y do. q=:1-q end.
)
NB. =====
NB. Yamanouti's Formula : Percent Point u(alpha)
NB. =====
Ninv_y=:3 : 0
z=-.4*y*(1-y)
x=.%:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y>0.5 do. x=-x end.
)
NB. =====
NB. Cash-Digital Option Model
NB. M.Shimura & J.Takeuchi Dec. 2006
NB. usage: cd data
NB. data is list ( 6 block)
NB. AssetPrice ExetPrice AcceptPrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=. 14500 14000 15000 2 38 6
NB. ===x=====

```

```

CD =: 3 : 0
'a b1 b2 c d e' =: y
t=. c % 12
u=. (^. a % b1) + t* (e1=.e % 100) - -:(vol=.d % 100) ^2
p2=. u % (vol * %: t)
n2=. Ndist p2
cd=. b2 *n2 *( ^ (-e1) * t)
)
NB. =====
NB. Plain-Vanilla Option Model(Black Scholes)
NB. J.Takeuchi & M.Shimura Nov. 2000
NB. ussage: PV data
NB. data is list ( 5 elements)
NB. AssetPrice ExecPrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=.x4500 14000 2 38 6
NB. =====
PV =: 3 : 0
'S K T V R'=. y
t=. T % 12
u=. (^. S % K) + t* (r=.R % 100) - -:(vol=.V % 100) ^2
d=. u % (vol * %: t)
d2=. d + vol * %: t
p1=. Ndist d2
p2=. Ndist d
C=(S * p1 ) - K *p2 *( ^ (-r) * t)
)
NB. =====
NB. Normal Random Numbers
NB. Rndm_Norm Size Mu Sigma
NB. =====
Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
)
NB. =====
NB. N Cash_Digital S K A T(Month) Volatility r
NB. =====
Cash_Digital=:4 : 0
'S0 K A T Vol r'=.y
S=.S0[i=.0[MM=.x

```

```

label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(1%12)*z
goto_L1.
label_owari.
w=.S-K
C=(^(1-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)*A
)
NB. =====
NB. N Plain_Vanilla S K T(Month) Volatility r
NB. =====
Plain_Vanilla=:4 : 0
'S0 K T Vol r'=:y
S=.S0[i=.0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(1%12)*z
goto_L1.
label_owari.
w=.S-K
C=(^(1-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#w
)

```

使用例

```

1000 Cash_Digital 100 90 110 12 10 10
97.2429
CD 100 90 110 6 10 10
103.032
1000 Cash_Digital 100 90 110 6 10 10
103.275
1000 Plain_Vanilla 100 90 12 10 10
18.1091
PV 100 90 12 10 10
18.6309

```

以下は今回のパワーオプションのプライシング関数である。
シミュレーションでは、

```

NB. =====
NB. N Powe_Option S K n T(Month) Volatility r

```

```

NB. =====
Power_Option=:4 : 0
'S0 K n T Vol r'=:y
S=.S0[i=.0[MM=.x
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(1%12)*z
goto_L1.
label_owari.
w=.S-K
C=(~-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#(S^n)-K^n
)

```

正規乱数関数、Rndm_Norm を使うことに注意すること。

計算式では、

```

NB. =====
NB. Power_Option Model
NB. J.Takeuchi May 2007
NB. ussage: power data
NB. data is list ( 6 elements)
NB. AssetPrice ExecPrice Power Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=. 140 150 2 12 38 6
NB. =====
Power =: 3 : 0
'S K n T V R'= . y
t=.T%12
u=(~.S%K)+t*(r=.R%100)--:(vol=.V%100)^2
d=. u%(vol*%:t)
d2=.d+n*vol*%:t
p1=.Ndist d2
p2=.Ndist d
C=(p1*(S^n)*^(t*(n-1)*(r+-:n**:vol))) - (K^n)*p2*(^(-r)*t)
)

```

である。

使用例

```

1000 Power_Option 140 150 2 12 38 6
8609.37
1000 Power_Option 140 150 2 12 38 6
8291.67

```

1000 Power_Option 140 150 2 12 38 6
7725.43

1000 Power_Option 140 150 2 12 38 6
8356.04

1000 Power_Option 140 150 2 12 38 6
8151.21

真の値は、

Power 140 150 2 12 38 6
8211.57

かなりバラツキがやや大きいように見える。これは価格を 2 乗している影響があるためで、
N 乗しなければ気にするような大きさにはならない。

【参考文献】

- 【1】竹内寿一郎・本田皓士(2006): エキゾチックオプション価格のシミュレーション その1 - キャッシュデジタルとプレーンバニラオプション - JAPLA 2006 シンポジウム 2006.12.9 資料
- 【2】竹内寿一郎(2007): エキゾチックオプション価格のシミュレーション その2 - ダイアログボックスで決めるオプション価格のJ関数 - JAPLA 研究会 2007.1.27 資料
- 【3】竹内寿一郎(2007): エキゾチックオプション価格のシミュレーション その3 - スプレッドオプションの価格式 - JAPLA 研究会 2007.4.28 資料
- 【4】山下司(2001): オプションプライシングの数理 - 基礎理論と専門書のブリッジテキスト - 金融財政事情研究会