（ＪＡＰＬＡ 2007/03/24）

F-分布のパーセント点の冪乗多項式による近似

帝京平成大学　鈴木義一郎

F-分布の分子の自由度をｍ、分母の自由度をｎとして

$$
\begin{aligned}
& a_1 m^{p_1} + a_2 m^{p_2} + \cdots\cdots\cdots + a_k m^{p_k} \\
& + b_1 m^{p_1} + b_2 m^{p_2} + \cdots\cdots\cdots + b_k m^{p_k} \\
& + c_1 (m^{0.25} n)^{p_1} + c_2 (m^{0.25} n)^{p_2} + \cdots\cdots\cdots + c_k (m^{0.25} n)^{p_k} \\
& \qquad (p_i = p_1 + (i-1)0.2\,;\, i = 1,2,\cdots\cdots\cdots,k-1)
\end{aligned}
$$

という冪乗多項式のモデル（パラメータの数はｋ ×3）を用いてパーセント点の近似式を求めてみる。ここでｍ、ｎのクロス項に関するｍの部分の冪としては、0.25 以外にも 0.2、0.5 などいろいろなものが考えられるが、種々検討してみた結果では、0.25 とするときに最もよい結果が得られた。さらに｛$p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_k$｝の間隔も 0.2 とした場合の結果が良好であった。

自由度が d=:5 10 15 20 40 120 のときの F-分布の上側１％点のデータは次のように与えられている

```
F1=:10.9571 5.6364 4.5556 4.1027 3.5138 3.1735
F1=:F1,:10.0511 4.8491 3.8049 3.3682 2.8005 2.4721
F1=:F1,9.7223 4.5582 3.5222  3.088 2.5216 2.1915
F1=:F1,9.5327 4.4054 3.3719 2.9377 2.3689 2.0346
F1=:F1,9.2912 4.1653 3.1319 2.6947 2.1142 1.7628
F1=:F1,9.1118 3.9965 2.9594 2.5168 1.9172  1.533
   F1
10.9571 5.6364 4.5556 4.1027 3.5138 3.1735
10.0511 4.8491 3.8049 3.3682 2.8005 2.4721
 9.7223 4.5582 3.5222  3.088 2.5216 2.1915
 9.5327 4.4054 3.3719 2.9377 2.3689 2.0346
 9.2912 4.1653 3.1319 2.6947 2.1142 1.7628
 9.1118 3.9965 2.9594 2.5168 1.9172  1.533
```

```
   dep=:3 :0

t=.>,{d;d=.5 10 15 20 40 120
t=.t,.(({."1 t)^0.25)*{:"1 t
```

```
mle=:,@[%.dep@]

pred=:dep@]+/ .*mle
ssr=:[:+/[:*:,@[-pred
```

,.t^/(>{.y.)+/(i.>{:y.)%5)	aic=:4 :'(36*^.(x.ssr y.)%36)+6*>{:y.' error=:([:+/[:|,@[-pred)%36"_

F1 aic _1.0;3 _211.553 F1 aic _1.1;3 _220.925 F1 aic _1.2;3 _216.537	F1 aic _1.1;4 _280.446 F1 aic _1.2;4 _281.572 F1 aic _1.3;4 _281.21	F1 aic _1.6;5 _283.307 F1 aic _1.7;5 _283.519 F1 aic _1.8;5 _282.853

F1 error _1.1;3 0.0341031 F1 error _1.2;3 0.0334272 F1 error _1.3;3 0.0378093	F1 error _1.1;4 0.0113973 F1 error _1.2;4 0.0108122 F1 error _1.3;4 0.0105575	F1 error _1.6;5 0.0093315 F1 error _1.7;5 0.00936923 F1 error _1.8;5 0.00955344

パラメータ数が[５×３]の場合のほうがＡＩＣの値がやや小さいが、実際に検討してみた結果では、[４×３]の場合のほうがよかった。

そこで、{$p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_k$} としては

```
   (13 :'(>{.y.)+/(i.>{:y.)%5')_1.2;4
_1.2 _1 _0.8 _0.6
```

を採用することにする。したがって{$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, c_4$} の最尤推定量は

```
   3 4 $ F1 mle _1.2;4
_241.446   559.915 _458.953   145.536
  613.33 _520.073 _166.186   217.322
 1971.33 _4101.44   3056.86 _855.006
```

のように与えられる。そこで、冪乗多項式を与える関数を次のように定義する。これを[近似法 ①]と書くことにする。

```
   pctf1=:4 :0
```

```
c=._241.446 559.915 _458.953 145.536
c=.c,613.33 _520.073 _166.186 217.322
c=.c,1971.33 _4101.44 3056.86 _855.006
p=._1.2 _1 _0.8 _0.6
(,."_1(>(,{:*{.^%@4:)L:0{x.;y.)^/p)+/ .*c
)
```

関数「pctf1」を用いて自由度が d=:5 10 15 20 40 120 の結果は次のようになる。

```
   ]FS1=:pctf1 _1.2 _1 _0.8 _0.6
10.9489 5.59518 4.54676 4.11777 3.52265 3.20718
10.0593  4.8565 3.80747 3.37659 2.78652 2.46521
9.72595  4.5722 3.52132 3.09006 2.50376 2.17558
9.55315  4.4222 3.36991 2.93875 2.35529 2.02055
9.28262 4.17943 3.12463 2.69484 2.11799 1.76139
9.09462 3.99635   2.942 2.51665 1.94646 1.53704
```

さらに平均誤差率を与える関数を

```
   error=:[:(+/%#)[:|[:,-
```

のように定義して、近似式 ① の誤差は

```
   F1 error FS1
0.0108077
```

のように与えられる。

【Paulson-Takeuti の近似式】

$$F_\alpha(m,n)=\left[\frac{(1-a)(1-b)+u_\alpha\sqrt{(1-a)^2b+(1-b)^2a-abu_\alpha{}^2}}{(1-b)^2-bu_\alpha{}^2}\right]^3\quad a=\frac{2}{9m},\, b=\frac{2}{9n}$$

Paulson,E.:An approximate noemalization of the analysis of variance distribution,
*Ann.Math.Statist.*13(1942),233-235.

戸田･清水･竹内:統計分布と計算機(6)F-分布の展開式と近似式の検討、標準化と品質管理 22-3(1969)、48-54

【Carter の近似式】

$$F_\alpha(m,n)=\exp(2z)$$

$$z=\frac{\sqrt{h+\lambda}}{h}u_\alpha-\left[\frac{1}{m-1}-\frac{1}{n-1}\right]\left[\lambda+\frac{5}{6}-\frac{2}{3h}\right]d\ ,\ h=2\left[\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}\right]^{-1},\ \lambda=\frac{u_\alpha{}^2}{6}-\frac{1}{2}$$

Carter,A.H.:Approximation to percentage points of z-distribution,Biometrika, 34(1947)352-358.

「Paulson-Takeuti の近似式 ② 」を与える関数を次のように定義する。

```
   ptf1=:4 :0
u=.2.32635
ar=.-.a=.2%9*x. [ br=.-.b=.2%9*y.
c=.(ar*/br)+u*%:((*:ar)*/b)+(a*/*:br)-(a*/b)**:u
(c%"1(*:br)-b**:u)^3
)
   ]FPT1=:d ptf1 d=:5 10 15 20 40 120
11.7882 5.68715 4.56863 4.10888 3.51767 3.17865
10.9142 4.90707 3.82019  3.3748  2.8027 2.47446
10.6016 4.61931 3.53863 3.09504 2.52321 2.19288
10.4408 4.46853 3.38915 2.94509 2.37027  2.0355
10.1935 4.23204  3.1509 2.70306 2.11557 1.76318
10.0243 4.06626 2.98015  2.5262 1.91883 1.53313

   F1 error FPT1
0.162082
```

さらに、「Carter の近似式 ③ 」をを与える関数を次のように定義する。

```
   cf1=:4 :0
u=.2.32635
'b a'=.%@<:L:0 x.;y.
'c d'=.(a-/b);((*:u)%6)-0.5 [ h=.2%a+/b
^+:(u*(%:h+d)%h)-c*d+(5%6)+2%3*h
)
   ]FC1=:d cf1 d=:5 10 15 20 40 120
11.4782  5.3171 4.24222 3.80629 3.25093 2.93515
11.2919 4.88006 3.77464 3.32726 2.75736 2.43272
11.0672  4.6369  3.5297  3.0807 2.50649 2.17695
10.9304 4.49911 3.39108 2.94066 2.36212 2.02727
10.6976 4.27246 3.16153 2.70673 2.11458 1.76143
10.5254 4.10778 2.99234 2.53155 1.91954 1.53301

   F1 error FC1
```

0. 264013