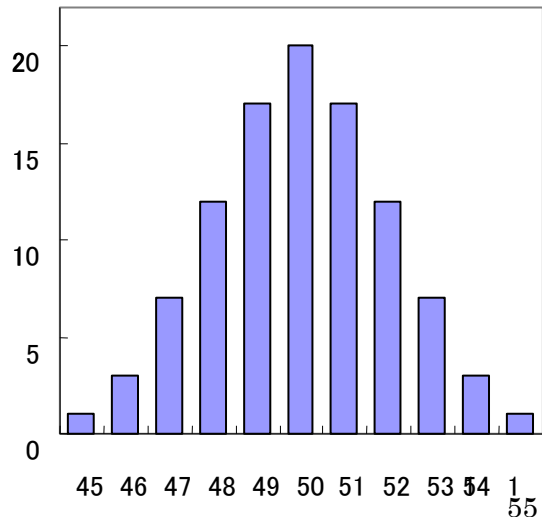


## 『標本分散』と『不偏分散』

帝京平成大学 鈴木義一郎

### ノーマル・チップの標本抽出実験

同じ重さ、同じ感触のまるいチップが各100個宛あり、それらには下表に示したような数字が記されてる。右図にチップの分布を示してみたが、これは、「正規分布」と呼ばれる連続型分布を離散型分布で近似したもので、「ノーマル・チップ」と呼ばれる。



ノーマルチップの分布

表ノーマル・チップの分布

書いてある数字	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
チップの数	1	3	7	12	17	20	17	12	7	3	1

このような100個のノーマル・チップから5個の観測値  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  を復元抽出でとり出し

$$\text{標本平均} : m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\text{偏差平方和} : Q = (x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2 + (x_4 - m)^2 + (x_5 - m)^2$$

$$\text{標本分散と標本標準偏差} : S^2 = Q/5, \quad S = \sqrt{S^2}$$

$$\text{不偏分散とその平方根} : s^2 = Q/4, \quad s = \sqrt{s^2}$$

といった数値を記録する。このような実験を20回行ったものを1組として合計4組について観察してみよう。表1～表4には、先に実験を行った赤チップ、緑チップ、それから乱

数サイ、カード抽出実験の結果を5つずつプールして得たものである。ただし表2 の場合は、緑チップの実験結果からすべて5を引いたものを記録してある。

ところで、このようなノーマル・チップの分布の平均は  $\mu = 50$ 、分散は  $\sigma^2 = 4.02$  となることが確かめられる。

表の最後の列に記入された○印および△印は、それぞれ  $S < s < \sigma$ 、 $S < \sigma < s$  となった場合の実験例であることを示している。20組のうち○印のケースが多いということは  $s$  が(したがって  $S$  も)実際の  $\sigma$  より小さめの値を推定する結果になることが多いという事実を示している。さらに△印まで考慮に入れると20組中13~17組も“ $S < \sigma$ ”ということから、 $S$  が  $\sigma$  のよい推定値とはなり得ないことが分かる。(データ数より1だけ少ない数“4”で割った)  $s$  の方が、むしろ  $\sigma$  のよい推定値を与えることが実験的に明らかになった。

実は、(データ数より1だけ少ない数“4”で割った)  $s^2$  が、分散  $\sigma^2$  に対する“偏りのない”推定値、つまり

$$E\{s^2\} = \sigma^2$$

となることが理論的に示すことができ、「不偏推定」と呼ばれている。ただ

$$E\{s\} < \sigma$$

となるから、 $s$  は標準偏差  $\sigma$  の不偏推定にはならない。

```

normal_5=:3 :0
mean=(+/%#)"1
sqd=([:+/[[:*:] -+/%#)"1
s_var=:sqd%#"1
u_var=:sqd%(<:@#)"1
cut2=[:".0.2"_:]
s_dev=[:cut2[:%: s_var
u_dev=[:cut2[:%: u_var
sdev=[:%: sqd%(<:@#)"1
t_value=[:cut2%:@#"1*(mean-50"_)%u_dev
'functions'
)

normal_d=:13 :' y.+1 3 7 12 17 20 17 12 7 3 1#i.11'

sl_diagram=:3 :0
a=.,.~. b=.<. y=.:~y.
a:(=b)#, ":",.10*(-<.)y
)

```

sl diagram D=:normal d 45

45	0
46	000
47	0000000
48	000000000000
49	0000000000000000
50	000000000000000000
51	000000000000000000
52	000000000000
53	0000000
54	000
55	0

```
sample=:13 :'(/:~?x.$#y.){y.'
10 5 sample D
49 50 50 52 53
50 51 51 52 53
50 51 51 51 52
49 50 52 53 54
47 50 50 50 52
50 51 51 52 52
46 50 51 51 52
47 50 50 51 51
48 51 52 53 53
48 48 50 50 54
```

d:(mean,s var,s dev,u var,u dev)"1 d=.10 5 sample D

49 49 49 50	49.4 0.24 0.49 0.3
50	0.55
47 49 49 51	49.4 2.24 1.5 2.8
51	1.67
50 50 51 51	51 1.2 1.1 1.5
53	1.22
49 50 50 51	50.6 1.84 1.36 2.3
53	1.52
48 50 51 51	50.8 3.76 1.94 4.7

54	2.17
46 49 50 50	49.4 3.84 1.96 4.8
52	2.19
49 49 50 51	50.4 2.24 1.5 2.8
53	1.67
49 50 51 52	51.2 2.96 1.72 3.7
54	1.92
46 48 51 51	49.6 5.04 2.24 6.3
52	2.51
50 50 51 51	51.4 3.44 1.85 4.3
55	2.07

表 1

標 本	$m$	$S^2$	$S$	$s^2$	$s$	判定
52 51 51 46 48	49.6	5.04	2.24	6.30	2.51	
48 50 49 52 51	50	2.00	1.41	2.50	1.58	○
49 50 52 51 49	50.2	1.36	1.17	1.70	1.30	○
49 51 53 50 49	50.4	2.24	1.50	2.80	1.67	○
51 52 50 51 51	51	0.40	0.63	0.50	0.71	○
52 47 50 53 50	50.4	4.24	2.06	5.30	2.30	
51 51 47 51 48	49.6	3.04	1.74	3.80	1.95	○
53 50 49 50 51	50.6	1.84	1.36	2.30	1.52	○
50 49 48 51 48	49.2	1.36	1.17	1.70	1.30	○
49 48 49 50 50	49.2	0.56	0.75	0.70	0.84	○
49 52 49 45 46	48.2	6.16	2.18	7.70	2.77	
47 50 49 51 48	49	2.00	1.41	2.50	1.58	○
48 49 50 49 52	49.6	1.84	1.36	2.30	1.52	○
49 52 48 48 51	49.6	2.64	1.63	3.30	1.82	○
50 50 54 52 50	51.2	2.56	1.60	3.20	1.79	○
50 48 49 53 52	50.4	3.44	1.86	4.30	2.07	△
46 53 51 50 52	50.4	5.84	2.42	7.30	2.70	
49 49 46 49 51	48.8	2.56	1.20	3.20	1.79	○
50 49 48 50 54	50.2	4.16	2.04	5.20	2.28	
46 51 54 50 51	50.4	6.64	2.58	8.30	2.88	

表 2

標 本	$m$	$S^2$	$S$	$s^2$	$s$	判定
49 47 54 50 53	50.6	6.64	2.58	8.30	2.88	
50 53 51 51 51	51.2	0.96	0.98	1.20	1.10	○
48 51 47 51 51	49.6	3.04	1.74	3.80	1.95	○
51 50 48 52 52	50.6	2.24	1.50	2.80	1.67	○
51 47 49 52 51	50.0	3.20	1.79	4.00	2.00	△
49 52 51 53 50	51.0	2.00	1.41	2.50	1.58	○
50 50 50 52 49	50.2	0.96	0.98	1.20	1.10	○
45 51 47 51 55	49.8	12.16	3.49	5.20	3.90	

49 46 52 49 50 | 49.2 | 3.76 | 1.94 | 4.70 | 2.17 |  
52 50 48 48 50 | 49.6 | 2.24 | 1.50 | 2.80 | 1.67 |  
50 53 48 48 50 | 49.8 | 3.36 | 1.83 | 4.20 | 2.05 | △  
51 48 49 51 53 | 50.4 | 3.04 | 1.74 | 3.80 | 1.95 | ○  
51 49 53 55 50 | 51.6 | 4.64 | 2.15 | 5.80 | 2.41 | ○  
50 51 50 52 48 | 50.2 | 1.76 | 1.33 | 2.20 | 1.48 | ○  
50 52 51 49 49 | 50.2 | 1.36 | 1.17 | 1.70 | 1.30 | ○  
49 49 47 49 50 | 48.8 | 0.96 | 0.98 | 1.20 | 1.10 | ○  
50 47 54 46 50 | 49.4 | 7.84 | 2.80 | 9.80 | 3.13 |  
54 49 50 51 55 | 51.8 | 5.36 | 2.32 | 6.70 | 2.59 |  
50 53 53 51 48 | 51.0 | 3.60 | 1.90 | 4.50 | 2.12 |  
48 49 46 49 51 | 48.6 | 2.64 | 1.63 | 3.30 | 1.82 | ○

表 3

標 本	$m$	$S^2$	$S$	$s^2$	$s$	判定
52 52 50 51 49	50.8	1.36	1.16	1.70	1.30	○
48 46 49 50 52	49.0	4.00	2.00	5.00	2.24	
49 47 47 52 48	48.6	3.44	1.85	4.30	2.07	△
52 50 48 47 49	49.2	2.96	1.72	3.70	1.92	○
53 49 51 52 51	51.2	1.96	1.40	2.20	1.48	○
50 51 48 49 50	49.6	1.04	1.02	1.30	1.14	○
52 47 52 47 54	50.4	8.24	2.87	10.30	3.21	
49 49 51 51 52	50.4	1.44	1.20	1.80	1.34	○
48 52 52 48 55	51.0	7.20	2.68	9.00	3.00	
46 51 49 48 49	48.6	2.64	1.62	3.30	1.82	○
50 51 50 54 49	50.8	2.96	1.72	2.70	1.92	○
50 51 49 55 53	51.6	4.64	2.15	5.80	2.41	
50 46 49 50 49	48.8	2.16	1.47	2.70	1.64	○
50 50 48 54 50	50.4	3.84	1.95	4.80	2.19	△
51 53 51 51 53	51.8	0.96	0.98	1.20	1.10	○
49 51 54 53 51	51.6	3.04	1.74	3.80	1.95	○
49 52 50 47 51	49.8	3.00	1.73	3.75	1.92	○
48 49 50 47 51	49.0	2.00	1.41	2.50	1.58	○
47 52 49 47 46	48.2	4.56	2.14	5.70	2.39	
47 50 52 52 52	50.6	3.84	1.96	4.80	2.19	△

表 4

標 本	$m$	$S^2$	$S$	$s^2$	$s$	判定
50 49 51 52 51	50.6	1.04	1.02	1.30	1.14	○
49 53 51 49 50	50.4	2.24	1.50	2.80	1.67	○
49 51 52 47 51	50.0	3.20	1.79	4.00	2.00	△
51 53 46 50 49	49.8	5.36	2.32	6.70	2.59	
52 53 48 48 50	50.2	4.16	2.04	5.20	2.28	
47 48 52 48 48	48.6	3.04	1.74	3.80	1.95	○
52 49 53 51 52	51.4	1.84	1.36	2.30	1.52	○
49 49 50 49 55	50.4	5.44	2.33	6.80	2.61	○

50	49	51	52	47		49.8		2.96		1.72		3.70		1.92		○
48	52	49	48	49		49.2		2.16		1.47		2.70		1.64		○
53	48	46	52	50		49.8		6.56		2.56		8.20		2.86		
51	49	53	50	53		51.2		2.56		1.60		3.20		1.79		○
52	52	52	50	51		51.4		0.64		0.80		0.80		0.89		○
48	50	47	48	51		48.8		2.16		1.47		2.70		1.64		○
50	49	53	53	50		51.0		2.80		1.67		3.50		1.87		○
50	51	51	49	49		50.0		0.80		0.89		1.00		1.00		○
49	50	48	50	50		49.4		0.64		0.80		0.80		0.89		○
51	52	49	46	49		49.4		4.24		2.06		5.30		2.30		
50	47	49	54	48		49.6		5.84		2.42		7.30		2.70		
51	50	50	50	51		50.4		0.24		0.49		0.30		0.55		○