同時方程式モデルの行列による解法

M.Shimura
JCD02773@nifty.ne.jp

2006 年 7 月 24 日

1　線形同時方程式

同時方程式は多入力、多出力の連立方程式システムが特色である。1950 年にコールルズ委員会でのクライン作成のモデル 1 が計量経済学の船出となったと言われる。

1.1　小さなアナログモデルから始めよう

1.1.1　Working Example

リンゴの数量、市場価格、購買者の所得、日照時間から需要関数、供給関数を求める。些か無謀なモデルであるが、モデルを求める手順の好例であるので検討してみよう。

ソースの出典:白砂堤津耶「例題で学ぶ · 初歩からの計量経済学」1998 日本評論社

構造型方程式	$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t}$ $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 T_t + u_{2t}$
「内生変数」 「外生変数」	Q_t=リンゴの数量 P_t=リンゴの市場価格 Y_t = 購買者の所得 T_t=日照時間

```
N Q0,.P0,.Y0,.T0  N year
0 57  78 28   7   Q0 Volume * 1000 pieces
1 55  96 29 4.1   P0 Price  Yen
2 66  87 32 7.2   Y0 Income of custommer *10000Yen
3 65  98 33 5.4   T0 Time of sunshine hour
4 71 104 35 5.8
```

```
5 74 105 36 6.7
6 71 110 36   5
7 71 113 38 6.3
```

1.1.2　構造型方程式から誘導型方程式を導く

内生変数を含む式は、Haavelmo *[1]バイアスと呼ばれる歪みを持ち、不偏性と一致性を持たない。そこで、外生変数と先決変数とで構成される誘導型方程式を導き、次いで、構造型方定式に戻すと、一致性は確保できる。

誘導型を求めるため例題の数式を展開すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 T_t + u_{2t} \\
&\alpha_1 P_t - \beta_1 P_t = -\alpha_0 - \alpha_2 Y_t + u_{1t} + \beta_0 + \beta_2 T_t + u_{2t} \\
&P_t(\alpha_1 - \beta_1) = -\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_2 Y_t + \beta_2 T_t - u_{t1} + u_{2t} \\
&P_t = \frac{-\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{-\alpha_2 Y_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2 T_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{-u_{t1} + u_{2t}}{\alpha_1 - \beta_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t} \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{-\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{-\alpha_2 Y_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2 T_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{-u_{1t} + u_{2t}}{\alpha_1 - \beta_1} \right) + \alpha_2 Y_t + u_{1t} \\
&= \alpha_0 + \frac{\alpha_1(-\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1(-\alpha_2 Y_t)}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1(\beta_2 T_t)}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1(-u_{1t} + u_{2t})}{\alpha_1 - \beta_1} + \alpha_2 Y_t + u_{1t} \\
&= \frac{\alpha_0(\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1(-\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1(-\alpha_2 Y_t) + \alpha_2 Y_t(\alpha_1 - \beta_1)}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1(\beta_2 T_t)}{\alpha_1 - \beta_1} + \\
&\frac{(-\alpha_1 u_{1t} + \alpha_1 u_{2t}) + (\alpha_1 u_{1t} - \beta_1 u_{1t})}{\alpha_1 - \beta_1}
\end{aligned}
$$

---

*[1] Trigve M.Haavelmo 1911-1999 Norway 1989 ノーベル記念賞

$$= \frac{\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{-\alpha_2\beta_1 Y_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1\beta_2 T_t}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

誘導型パラメータを次のように置くと下表右欄の誘導方程式を導くことができる

$$\pi_{10} = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_{11} = \frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_{12} = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\pi_{20} = \frac{-\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_{21} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_{22} = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$u_{1t} = \frac{-u_{t1} + u_{2t}}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad u_{2t} = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

構造型方程式	誘導型方程式
$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t}$	$Q_t = \pi_{10} + \pi_{11} Y_t + \pi_{12} T_t + u_{1t}$
$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 T_t + u_{2t}$	$P_t = \pi_{20} + \pi_{21} Y_t + \pi_{22} T_t + u_{2t}$

内生変数と外生変数の区分は微妙であって判然とした区分は存在しない。モデルの中の変数が「自立的に、そしてモデル内の他の変数とは独立に変動すると期待できるかどうか」[*2] を一応の目安として、行列表現で左の項に記述する外生変数と先決内生変数を先決変数とする。内生変数は左欄の推計対象変数である。

1.2 線形同時方程式の行列表現

構造型方程式	構造型方程式の整理	区分
$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + u_{1t}$ $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 T_t + u_{2t}$	$Q_t - \alpha_1 P_t = \alpha_0 + \alpha_2 Y_t + u_{1t}$ $Q_t - \beta_1 P_t = \beta_0 + \beta_2 T_t + u_{2t}$	「内生変数」 Q_t=リンゴの数量、 P_t=リンゴの市場価格 「外生変数」 Y_t = 購買者の所得、 T_t=日照時間

*2 W.H.Green 計量経済分析 II(2000)p835

1.2.1 構造型の行列表現

内生変数を左に集め、右の項は外生変数と先決内生変数 (X_{t-1} 型など) で記述する。

この区分は、大きな水槽の中を浸透膜や浸透壁で区分けするようなもので、変数自体は相互に行き来できなくなるが、パラメーターは透過して、行き来できる。*3

第 1 式

$$\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_t & T_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} + u_{1t}$$

第 2 式

$$\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_t & T_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + u_{2t}$$

全体を行列で表す

$$\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_t & T_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} + (u_1 + u_2)_t$$

*3 モデルによっては、元気な金魚が上を飛び越して往来している場合も見受けられる。

行列の成分を表すと

$$\begin{bmatrix} Q_1 & P_1 \\ Q_2 & P_2 \\ \vdots & \vdots \\ Q_n & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & T_1 \\ 1 & Y_2 & T_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_n & T_n \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} + (u_1 + u_2)_t$$

構造型を記号で表現すると

$YB = Z\Gamma + E$

1.2.2 誘導型の行列表現

行列表現では、誘導型は逆行列を用いて簡潔に表せる。

$Y = Z\Gamma B^{-1} + EB^{-1}$

これは、方程式体系の同時決定部分を解いたものである。誤差項を除くと次のようになる。

$Y = Z\Gamma B^{-1}$

J の高度な配列計算機能を用いると簡単に計算できる。

B のパラメータは、B と Γ の作成の時に定義式や明示的に移項した項の場合は数式通りとする。Γ は定義式は定義式は数式通りとする。それ以外の OLS のパラメータは成り行きとする。

OLS で構造型のパラメータを求める	`shira_sub0 SHIRA`
	
	`4.62269 _0.295458 2.72182`
	`_14.0737  0.569307 4.04775`
	
	$Q = 4.62269 - 0.295458P + 2.72182Y$
	$Q = -14.0737 + 0.569307P + 4.04775T$
		各変数の単独の OLS

B
 	
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}$
	a1=. shira_sub2 SHIRA
	
	`       1         1`
	`0.295458 _0.569307`	

B^{-1}	B の逆行列
	
	$\dfrac{1}{\alpha_1-\beta_1}\begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
	%. shira_sub2 SHIRA
	
	`0.658337  1.15638`
	`0.341663 _1.15638`
		1 とした部分にもウエイトがかかる。

Γ
 	
$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$
	a2=. shira_sub3 SHIRA
	
	`4.62269 _14.0737`
	`2.72182        0`
	`      0  4.04775`
		誘導型即ち、外生変数と先決内生変数 Z のパラメーター部分である。
		行の数は Z の変数の数で、列の数はモデルの式の数で決まる。

<table>
<tr><td>ΓB^{-1}</td><td>

```
 a2 +/ . * %. a1
_1.76517  21.6202
 1.79187  3.14747
 1.38296 _4.68075
```

$-1.76517 + 1.79187Y + 1.38296T$
$21.6202 + 3.14747Y - 4.68075T$</td><td>システムの回帰式 (誘導型)</td></tr>
<tr><td>$\hat{Q}$</td><td>先決変数に回帰式をかける

```
a=. a2 +/ . * %. a1
(1,. 2 3 puc SHIRA) +/ . *  a

58.0881 76.9841
55.8693 93.7057
65.5322 88.6378
64.8347 100.211
68.9716 104.633
72.0082 103.568
69.6571 111.525
75.0387 111.735
```
</td><td>一行でモデルの計算ができる。これは全体テストである</td></tr>
</table>

構造型 $YB = Z\Gamma$ から誘導型 $Y = Z\Gamma B^{-1}$ に変換する. このとき、B の逆行列 B^{-1} 即ち内生変数に移った OLS のパラメーターの逆行列が先決変数に残った OLS のパラメーターに作用して同時方程式システムのパラメーターを決定する。

この白砂モデルは適正識別である。B と Γ のサイズの差は 1 でこれは Γ の OLS の定数項部分である。

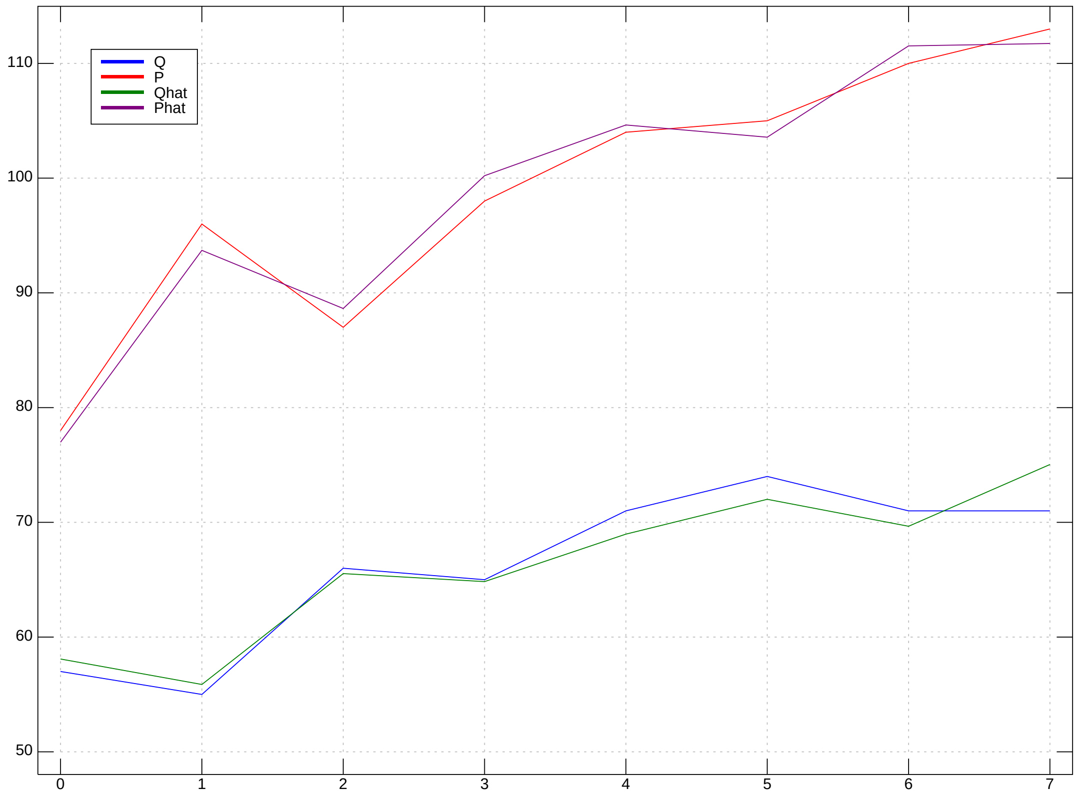

図 1　Q P

$YB = Z\Gamma \rightarrow Y = Z\Gamma B^{-1}$

この一行で同時方程式は計算できる。

まず、ΓB^{-1} は次により求められる。

```
 a2 +/ . * %. a1
_1.76517  21.6202
```

```
 1.79187  3.14747
 1.38296 _4.68075
```

これに定数項を加えた Z を掛ける。

```
   (1,.2 3 puc SHIRA) +/ . * a2 +/ . * %. a1


  shirasago_reg SHIRA

 Y          Yˆ
+------+---------------+
|57  78|58.0881 76.9841|
|55  96|55.8693 93.7057|
|66  87|65.5322 88.6378|
|65  98|64.8347 100.211|
|71 104|68.9716 104.633|
|74 105|72.0082 103.568|
|71 110|69.6571 111.525|
|71 113|75.0387 111.735|
+------+---------------+
```

ここで肝要なのは同時方程式の YB が ZΓ とイコールであるか、と言うことである。すなわち Y に マトリクス B が作用したのが ZΓ であれば ZΓ を B で割り戻せば Y の推計値 ($\hat{Y}$) を求めることができる。

B
 	
$$\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}$$
`a1`
`1 1`
`0.295458 _0.569307`
	逆行列 B^{-1}
	
	$$\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}\begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$$
	`%. a1`
	`0.658337 1.15638`
	`0.341663 _1.15638`

Γ $$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$$ $$\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}\begin{bmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ 内積計算では右パラメーターは (自動で) 転置され、列が (同じサイズの) 左パラメーターに掛け合わされる。	最終的にはこの形で Γ と行 × 行で掛け合わされる。 $(\alpha_0\ \beta_0) \times (\beta_1\ \ -\alpha_1) = \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1 = \pi_{10}$ $(\alpha_2\ 0) \times (\beta_1\ \ -\alpha_1) = \alpha_2\beta_1 = \pi_{11}$ $(0\ \beta_0) \times (\beta_1\ \ -\alpha_1) = -\beta_0\alpha_1$ $(\alpha_0\ \beta_0) \times (1\ \ -1) = \alpha_0 - \beta_0 = \pi_{20}$ $(\alpha_2\ 0) \times (1\ \ -1) = \alpha_2 = \pi_{21}$ $(0\ \beta_0) \times (1\ \ -1) = -\beta_0$ $\frac{1}{\alpha_1-\beta_1}$ の記述をを省略した。 誘導型のパラメーターを推計している。(間接最小二乗法と完全には一致しない)

この計算手順は間接最小二乗法と類似している。
*4

1.2.3 Script

```
NB.  ------ model Shirasago p191--------
shirasago_reg=: 3 : 0
NB. u. SHIRA
BETA=: shira_sub2 y.
GAMMA=: shira_sub3 y.
(0 1 puc y.);(1,.2 3 puc y.) +/ . * GAMMA +/ . * %. BETA

NB. ,.(shira_sub0 y.);REGNEW=:(%. |: BETA) +/ . * |: GAMMA
)
```

OLS の係数を求める

```
shira_sub0=: 3 : 0
NB. y. is SHIRA
;("1) ,.reg0 L:0 (1 2 0 puc y.); 1 3 0 puc y.
)
```

B とガンマを形成する

*4 内積計算の手順

		内積計算	c1 の列を c0 にかける
c0=.3 2 $ >:i.6 1 2 3 4 5 6	c1=.2 2 $ 3 4 5 6 3 4 5 6	c0 +/ . * c1 13 16 29 36 45 56	c0 +/ . * 3 5 13 29 45 c0 +/ . * 4 6 16 36 56

```
NB. make Beta
shira_sub2=: 3 : '2 2 $ 1 1, _1 _1 * 1 puc shira_sub0 y.'
NB. Make Gamma
shira_sub3 =: 3 : '3 2 $ 1 1 1 0 0 1 expand ; |: 0 2 puc shira_sub0 y. '
```

1.3 識別

識別は需要関数、供給関数を類似した変数で説明できるかと言うところからスタートすることが多い。しかし AIC で練り込まれた OLS は変数の数も多く多次元空間を形作っている。これらの多くは過剰識別と説明される。

適正識別は、四つ葉のクローバーを捜すようだ。

モデルの行の中の 0 の数 (係数に関する先験的制約)=R

モデル全体の内生変数の数=G

	識別不能	正確に識別	過剰識別
次数条件	$R \geq G-1$ $R < G-1$	$R = G-1$	$R > G-1$
ランク条件	$R \geq G-1$ のとき $\mathrm{rank}(A) < G-1$	$\mathrm{rank}(A) = G-1$	$\mathrm{rank}(A) = G-1$

識別はモデル全体の先決変数を数えた上で、式一本毎に行う。モデル全体の係数配列を作る

過剰識別では

1. 間接最小二乗法は適正識別以外では使えない
2. 過剰識別は 2 段階最小二乗法で推計できる

モデル (1) の識別。

	Q	P	Y	T
(1)	1	α_1	α_2	0
(2)	1	β_1	0	β_2

$G = 2$

$R = 1, 1$

$R = G - 1$

(1) $\mathrm{rank}\, A = \beta_2$ は 0 ではない。$\rightarrow$ $\mathrm{rank}\, A = 1$

(2) $\mathrm{rank}\, A = \alpha_2$ は 0 でない。

1.4　間接二乗法と 2 段階最小二乗法

以下のスクリプトは鈴木義一郎による。

1.4.1　間接二乗法

```
 ((0 puc SHIRA);1 puc SHIRA) ils  2 3 puc SHIRA
+--------------------------+
|4.62303 _0.273907 2.65796|
+--------------------------+
|_17.1945 0.594639 4.15151|
+--------------------------+
```

1.4.2　2 段階最小二乗法

```
 ((0 puc SHIRA);1 puc SHIRA) tsls  2 3 puc SHIRA
+--------------------------+
|4.62303 _0.273907 2.65796|
+--------------------------+
|_17.1945 0.594639 4.15151|
+--------------------------+
```

1.5 モデルの連立方程式を解く

連立方程式は経済システムの要素間の相互依存関係を分析するのに有効である。

例えば次のような線形モデルの連立方程式を解く場合を考える。

$C_t = 10 + 0.4Y_t + 0.5C_{t-1}$ $I_t = 5 + 0.2Y_t$ $Y_t = C_t + I_t + G_t$	$C_t - 0.4Y_t = 10 + 0.5C_{t-1}$ $I_t - 0.2Y_t = 5$ $Y_t - C_t - I_t = G_t$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C \\ I \\ Y \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 10 + 0.5C_{t-1} \\ 5 \\ G \end{bmatrix}
$$

$C_{t-1} = 10, G = 10$ と数値を与えれば、線形連立一次方程式は逆行列 `%.` を用いて簡単に解を得られる。ここではクラメール法を用いた。

```
a=.  3 3 $ 1 0 _0.4 0 1 _0.2 _1 _1 1

 1  0 _0.4
 0  1 _0.2
_1 _1    1

   a,. 15 5 10

 1  0 _0.4 15
 0  1 _0.2  5
```

```
_1 _1    1 10


 cr  a,. 15 5 10
          1 8.88178e_16 1.33227e_15 45
_1.94289e_15           1 8.32667e_16 20
_6.21725e_15 2.22045e_15           1 75
```

[C I Y] を線形変換したものが

$$\begin{bmatrix} 10+0.5C_{t-1} & 5 & G \end{bmatrix}$$

であり、[C I Y] を逆行列を用いて割り戻して求めるプロセスである。

多くの過剰識別のモデルはここの連立のプロセスが通らない。ここで、OLS を用いるか TSLS を用いるかは大きな影響を与えない。

TSLS を用いて求めたパラメータで個別に [C I Y] を推計して解析を進めることはできる。

1.6 蓑谷の例題-小さな経済モデル

家計消費支出 (実質)	$C=\alpha_0+\alpha_1 Y+\alpha_2 W+u_1$	(1)
民間企業設備投資 (実質)	$I=\beta_0+\beta_1 V_{-1}-\beta_2 V_{-2}+\beta_3 T_{-1}+u_2$	(2)
家計可処分所得	$Y=\gamma_0+\gamma_1 V+u_3$	(3)
貨幣供給	$M=\delta_0+\delta_1 V-\delta_2 R+u_4$	(4)
国内総生産 (実質)	$V=C+I+Z$	(5)

内生変数を左辺に移項する。右辺は外生変数と先決内生変数が残る。

$$\begin{aligned}
C-\alpha_1 Y &= \alpha_0+\alpha_2 W+u_1\\
I &= \beta_0+\beta_1 V_{-1}-\beta_2 V_{-2}+\beta_3 I_{-1}+u_2\\
Y-\gamma_1 V &= \gamma_0+u_3\\
M-\delta_1 V &= \delta_0-\delta_2 R+u_4
\end{aligned}$$

$V - C - I \qquad\qquad = Z$

行列で表すと

$$\begin{bmatrix} C & I & Y & M & V \end{bmatrix}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\gamma_1 & -\delta_1 & 1
\end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & W & V_{-1} & V_{-2} & I_{-1} & R & Z \end{bmatrix}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 & 0 \\
\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

mino_sub2 の +-は以降を伴うので、明示的に符合を指定した。

```
   mino_sub2 MINO
         1 0         0        0 _1
         0 1         0        0 _1
 _0.619812 0         1        0  0
         0 0         0        1  0
         0 0 _0.618411 _1.21051  1
```

mino_sub3 の +-は元の式の定義式で指定されたものは明示的に、回帰式のは成り行きにとした。

```
   mino_sub3 MINO
```

```
  14.4634  _7.77127 22.3375 _11.0481 0
0.0823724         0       0        0 0
        0  0.595827       0        0 0
        0 _0.535173       0        0 0
        0   0.67628       0        0 0
        0         0       0 _10.9407 0
        0         0       0        0 1

   a2 +/ . * %. a1
      41.073 _7.77127     42.9316  29.2638     33.3017
    0.133569        0   0.0826007 0.161687    0.133569
    0.370324 0.595827    0.597478  1.16953    0.966151
    0.332626 0.535173    0.536656  1.05048    0.867799
    0.420328  0.67628    0.678155  1.32745     1.09661
_5.76962e_15        0 1.82199e_15  10.9407 1.21466e_15
     0.62153        0     1.00277  1.96287     1.62153
```

1.6.1 識別

C	I	Y	M	V	W	V_{-1}	V_{-2}	I_{-1}	R	Z
1	0	α_1	0	0	α_2	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	β_1	β_2	β_3	0	0
0	0	1	0	$-\gamma_1$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	$-\delta_1$	0	0	0	0	$-\delta_2$	0
-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	1

R= 8 7 9 8 7 > 4

$G = 5 - 1 = 4$

(1) 式のランク条件 8 カラムから 4×4 の行列式の組み合わせを作り、どれかが 0 にならなければ過剰識別。全てが 0 になれば識別不能である。

1	0	0	β_1	β_2	β_3	0	0
0	0	$-\gamma_1$	0	0	0	0	0

$$
\begin{array}{ccc|ccccc}
0 & 1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

1.6.2　**システムの回帰係数**

この蓑谷のモデルは過剰識別である。

回帰式は縦に出る。

```
   a1=. mino_sub2 MINO
   a2=. mino_sub3 MINO

   a2 +/ . * %. a1
      (1)        (2)          (3)      (4)           (5) 式
---------------------------------------------------------
     41.073  _7.77127      42.9316  29.2638       33.3017
   0.133569         0    0.0826007 0.161687      0.133569
   0.370324  0.595827     0.597478  1.16953      0.966151
  _0.332626 _0.535173    _0.536656 _1.05048     _0.867799
   0.420328   0.67628     0.678155  1.32745       1.09661
5.76962e_15         0 _1.82199e_15 _10.9407 _1.21466e_15
    0.62153         0      1.00277  1.96287       1.62153


  a1=. mino_sub2 MINO
  a2=. mino_sub3 MINO


 (<5{.Y),:<5{. (1,.Z)+/ . *  a2 +/ . * %. a1
+----------------------------------------+
|69.1303 10.7293 81.2368 78.1929 111.482|NB. Original Y
|76.4408  13.379 89.2311 86.4925 123.918|
|84.1501 17.0362 99.5354 94.7557 137.745|
|  92.29 20.6077 109.297 103.765 154.925|
|101.664  26.799 121.983 114.882 173.726|
+----------------------------------------+
```

```
|83.3412 11.4471 100.511 62.1061 126.411| NB. Estimate Y
|85.0209 9.75124 102.032  65.083  128.87|
|91.6111 15.4479 111.152 84.0293 143.618|
|99.1147 19.5048 121.683 103.549 160.647|
|106.226 24.7564  131.33 122.433 176.247|
+---------------------------------------+
```

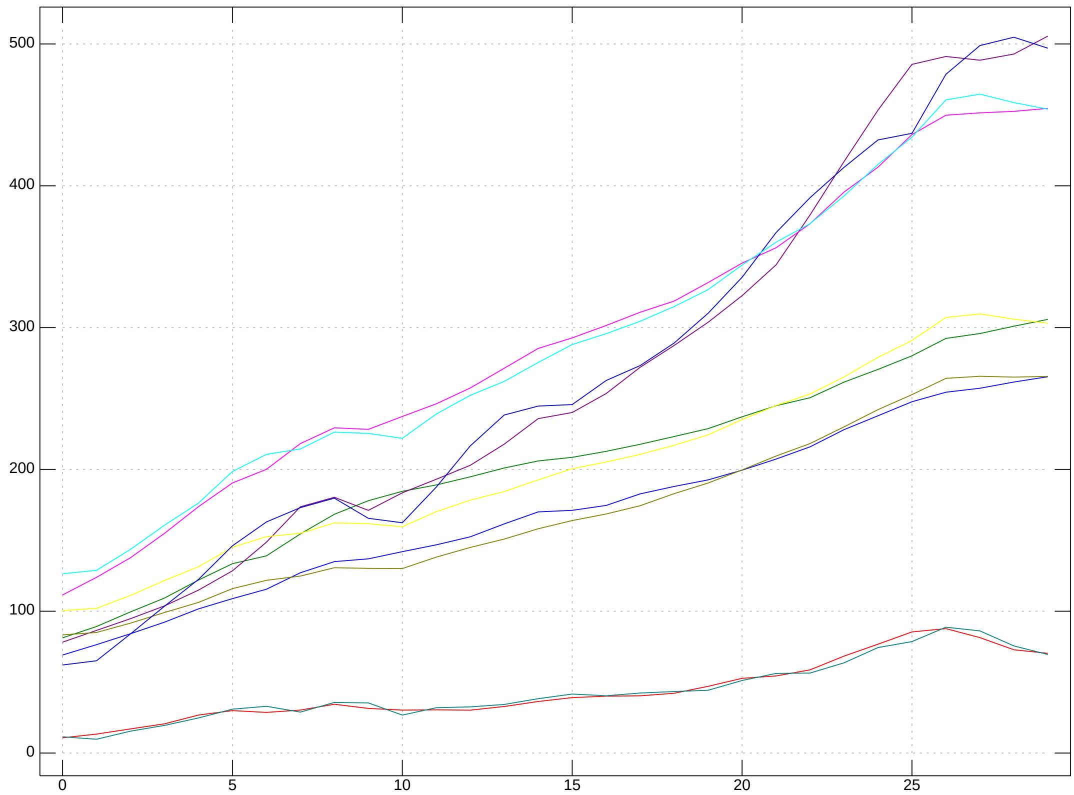

図 2　Minotani model-1

元の値と推計値との相関係数テーブル

```
_5}. 5}."1 cortable  Y,.  minotani_regx MINO

   C        I        Y         M       V
0.992539 0.958745 0.995349 0.990261 0.995349
```

```
0.975048 0.991997 0.972825 0.968293 0.972825
0.976808  0.94015 0.983398 0.974462 0.983398
0.997007 0.974638 0.993284 0.993856 0.993284
0.994844 0.966722 0.997623 0.992358 0.997623
```

1.7 Klein Model

Klein(1950) の有名なマクロ経済のモデルである。

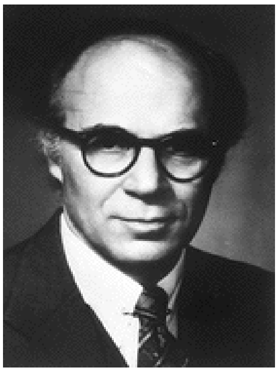

図 3　L.Klein

1950 年のクラインのモデル 1 は僅か 8 本の方程式で構成され、1921 年から 40 年にかけての大不況の経緯をもののの見事にトレースし、これを持って、経済学は一人前の科学として船出を遂げたと言われる。
*5

(消費)	$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 (WP_t + WG_t) + e_{1t}$
(投資)	$I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + e_{2t}$
(民間賃金)	$WP_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + e_{3t}$
(均衡需要)	$X_t = C_t + I_t + G_t$
(民間利潤)	$P_t = X_t - T_t - WP_t$
(資本ストック)	$K_t = K_{t-1} + I_t$

外生変数	G 政府非賃金支出
	T 間接法人税 + 純輸出
	WG 政府賃金支出
	A 1930 年から測ったトレンド
先決変数	ラグ付き資本ストック
	民間利潤
	総需要
内生変数	各式の左に置いてある

内生変数を左に送って整理する。

$$C_t - \alpha_1 P_t - \alpha_3 WP_t = \alpha_0 + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 WG_t + e_{1t}$$
$$I_t - \beta_1 P_t = \beta_0 + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + e_{2t}$$
$$WP_t - \gamma_1 X_t = \gamma_0 + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + e_{3t}$$
$$X_t - C_t - I_t = G_t$$
$$P_t - X_t + WP_t = -T_t$$
$$K_t - I_t = K_{t-1}$$

行列型で表現する。(上のナンバーは式の番号)

$$\begin{bmatrix} C_1 & I_t & WP_t & X_t & P_t & K_t \end{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\alpha_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & 1 & -1 & 0 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} =$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & P_{t-1} & WG_t & K_{t-1} & X_{t-1} & A_t & G_t & T_t \end{bmatrix}
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

$$+(u_1 + u_2 + u_3)i$$

1.7.1 Klein の用いた数値

NB.	YEAR	C*	P	W	I	(K-1)	X	W’	G	T
	1920	39.8	12.7	28.8	2.7	180.1	44.9	2.2	2.4	3.4
	1921	41.9	12.4	25.5	-0.2	182.8	45.6	2.7	3.9	7.7
	1922	45.0	16.9	29.3	1.9	182.6	50.1	2.9	3.2	3.9
	1923	49.2	18.4	34.1	5.2	184.5	57.2	2.9	2.8	4.7
	1924	50.6	19.4	33.9	3.0	189.7	57.1	3.1	3.5	3.8
	1925	52.6	20.1	35.4	5.1	192.7	61.0	3.2	3.3	5.5
	1926	55.1	19.6	37.4	5.6	197.8	64.0	3.3	3.3	7.0
	1927	56.2	19.8	37.9	4.2	203.4	64.4	3.6	4.0	6.7
	1928	57.3	21.1	39.2	3.0	207.6	64.5	3.7	4.2	4.2
	1929	57.8	21.7	41.3	5.1	210.6	67.0	4.0	4.1	4.0
	1930	55.0	15.6	37.9	1.0	215.7	61.2	4.2	5.2	7.7
	1931	50.9	11.4	34.5	-3.4	216.7	53.4	4.8	5.9	7.5
	1932	45.6	7.0	29.0	-6.2	213.3	44.3	5.3	4.9	8.3
	1933	46.5	11.2	28.5	-5.1	207.1	45.1	5.6	3.7	5.4
	1934	48.7	12.3	30.6	-3.0	202.0	49.7	6.0	4.0	6.8
	1935	51.3	14.0	33.2	-1.3	199.0	54.4	6.1	4.4	7.2
	1936	57.7	17.6	36.8	2.1	197.7	62.7	7.4	2.9	8.3

1937	58.7	17.3	41.0	2.0	199.8	65.0	6.7	4.3	6.7
1938	57.5	15.3	38.2	-1.9	201.8	60.9	7.7	5.3	7.4
1939	61.6	19.0	41.6	1.3	199.9	69.5	7.8	6.6	8.9
1940	65.0	21.1	45.0	3.3	201.2	75.7	8.0	7.4	9.6
1941	69.7	23.5	53.3	4.9	204.5	88.4	8.5	13.8	11.6

Source D.N.Gjarati,Basic Econometrics 4th Edition Table 20.5

OLS	]a=. klein_sub0 KLEIN (1) 16.2366 0.192934 0.0898849 0.796219 (2) 8.36456 0.514518 0.225604 _0.0977402 (3) 0.194592 0.439477 0.14609 0.130245
B	]a1=. klein_sub2 KLEIN 1 0 0 _1 0 0 0 1 0 _1 0 _1 _0.796219 0 1 0 1 0 0 0 _0.439477 1 _1 0 _0.192934 _0.514518 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1

<table>
<tr><td>Γ</td><td><pre>
 ]a2=. klein_sub3 KLEIN
  16.2366   8.36456 0.194592 0 0 0
0.0898849   0.225604   0 0 0 0
 0.796219   0   0 0 0 0
        0 _0.0977402   0 0 0 1
        0   0 0.14609 0 0 0
        0   0 0.130245 0 0 0
        0   0   0 1 0 0
        0   0   0 0 _1 0
</pre></td></tr>
<tr><td>REG</td><td><pre>
  a2 +/ . * %. a1

    (1)   (2)   (3)   (4)   (5)   (6)
   60.832   36.268 42.8678   97.1   54.2322   36.268
 0.659878   0.584474 0.546864   1.24435 0.697488   0.584474
  2.23474   0.905702 1.38015   3.14045   1.76029   0.905702
_0.176587   _0.20892 _0.169421 _0.385507 _0.216086   0.79108
 0.111563 _0.0604149 0.168568 0.0511479 _0.11742 _0.0604149
0.0994628 _0.0538624 0.150286 0.0456005 _0.104685 _0.0538624
   1.8067   1.1375   1.73338   3.9442   2.21081   1.1375
 _1.47109   _1.31925 _1.22629 _2.79033 _2.56405   _1.31925
</pre></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>COR</td>
<td>Y と Ŷ との相関係数 (対角行列上)
<pre>
          cortable
     C   I   WP   X   P   K
C 0.915 0.523 0.908 0.851 0.592 0.433
I 0.421 0.802 0.465 0.522 0.657_0.336
WP 0.939 0.618 0.946 0.906 0.687 0.425
X 0.915 0.685 0.926 0.904 0.716 0.273
P 0.656 0.852 0.683 0.721 0.798_0.099
K 0.308_0.146 0.328 0.202_0.043 0.890
</pre>
</td>
</tr>
</table>

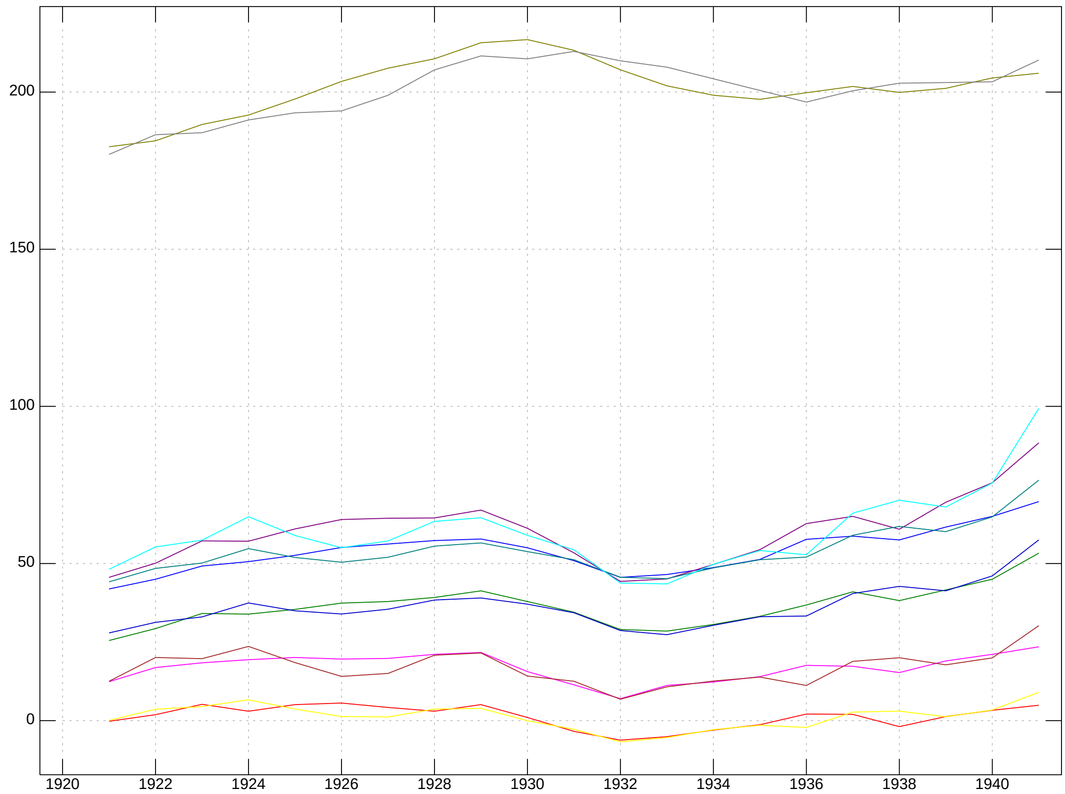

図 4　L.Klein