西川氏の微分方程式グラフィックへ

Tutorials　と　竹内コメント対策

中野　嘉弘　８３才　（札幌市）

FAX 専　011-588-3354　　　　　yoshihiro@river.ocn.ne.jp

　Ｊグラフィックスが難しいのは、Version 依存性が強いからだ。　西川論文への応援エッセイを書く。　改良・発展の楽しみがある！

０．　は　し　が　き

　JAPLA １０月例会での西川会長の論文　『Ｊによる微分方程式のグラッフィック・アプローチ（その１）　１階常微分方程式 － 数値解と方向場表示の活用 』（文献１）の実用化に些かお手伝い出来た因縁上、さらに、応援演説めいた話を提供したい。
実行の途中経過の要点が、別に出力されて、残るようにも工夫した。
近く（１１月例会で）、続編の西川論文「・・・・その１一続き」（文献１－ａ）の予定も聞いて居るので、「その続きの又・続き」の趣向である。
単に「使用法の入門編」のつもりであったが、最近、慶応大・竹内先生からの早速のコメントなど、難問発生を聞かされたので、解決法など、ロートルの意見を追加した。

（西川会長から提供・受領した Ｊの 原 Scriptを nsdf.ijs と呼ぼう。　ns は西川、df は微分方程式のつもりである。　後々の話の混乱を避けるため、中野自身の改訂には n を冠して nnsdf とし、さらに改訂番号 3 などを末尾に付加して　nnsdf3.ijs などと自称する。　Ｊ の Version は　Ｊ５版　J504b　である。　御参考までに。
これは予想される討論への準備である。　プライオリテイはあくまで西川会長にある。）

１．　入　門

１．　起動法

　Script File （例えば J5.04b　版の　nnsdf3.ijs）を open して　run する。
J Windows 実行画面 (ijx) 上で　run ''　リターン・キーを押せば、J　dfield の操作ウィンドウズが出現する。　（西川　文献１．p.7 に例示）

２．　Dif_Equation　の入力例

　今回の微分方程式・西川法は　１階で、　独立変数　x、従属変数 y　の暗黙指定に限る。

ａ．　必ず出来る基本例

i)

x を入力は　$\frac{dy}{dx} = x$ の意味。　解は　$y = \frac{1}{2} x^2$　（２次式の筈）

ii)

y を入力は　$\frac{dy}{dx} = y$ の意味。　解は　$y = \exp(x)$ （指数関数の筈）

練習は、これらの例から出発するのが良い。

英数半角文字で x または y を Dif_Equation ボタンの隣りのエデイイト・ボックスに入力し、リターン・キー を押す。
【注意】 負数の -x は可、 - x の如くスペース挿入は domain error ！
ボックス窓だけでなく、 ijx の実行画面にも、今、ボックスに入力した英数字が、そのまま示されるように工夫した。 文字のフォントが小さい場合等に、チェック用に便利である（中野の J504b nnsdf3.ijs 利用時での話、以下同様）。

３． Dir.Field 方向場 ボタン を クリックする。

x-y 座標軸と方向場のベクトル群が表示される。 既に、放物線 または 指数関数の傾向が現れる。

４． 初期条件 Initial Position のエデイットボックスへ の入力

例えば x = 0 に対して y = 1 ならば、 0,（コンマ） 1 の如くボックスに、２つの数字の組を入力し、リターン・キー を押す。 別に ijx の実行画面にも、今、入力した数字が、そのまま表示されるので、チェックになる。（P.8 を参照）
【注意】 小数点付きはエラーとなる。 数字 ３ケやそれ以上などもエラー。
数字が １ケ では、次の入力がなされるまで、待って居るので、進行せぬ。

５． 数値解の表示 Part.Sol （Particular Solution 個別解）をボタン・クリックする。
今の例、入力が x での解は放物線、入力 y での解は指数曲線で表示される。Clear ボタンを押さずに、初期条件値を色々替えてトライすれば、色替わりの平行移動曲線群が描かれる。

６． 結果の印刷には、Windows 画面の印刷ソフトを用いるのが賢明である。
例えば、 ソフト（Screen Copy）、ソフト（すぐれもの）等。
カラー印刷が望ましい。

７． 印刷し終り、別種の問題に移りたいならば、 Clear ボタンを押す。
全てが終了ならば Exit ボタンを押すか、または、J dfield File ウインドウズの右上隅の X 「閉じる」ボタンを押せば良い。

２． 初 級

１． 初期条件の変更による解の群の表示

直前の１．節、４．項 初期条件 に於いて、数値入力を、 0,（コンマ）0 や 0, 1 、0, 2 等と変更して、同様なことを逐次行えば、上下に平行移動的な解曲線の群が色変わりで表示される。（この際、 Clear ボタンは印刷終了までは押さない事。毎回押すのが賢明かどうか？ 試して見るのも経験だ。）
曲線の色と、条件の数値との対応は、 ijx の実行画面に NB.文 （コメント）として、その都度、ＫＢからメモ入力して置けば良い。

２． 負値の入力 -x、 -y、 _1 など及び 演算記号入力は、Ｊ言語の習慣に従う。

西川の既報（文献１）には、Dif_Equation として、ボックス入力例
i) y-x

ii) (y^2)-(x^2) の例がある。 読者のトライを乞う。

※　文字、記号の間に余計なスペースが入るとエラーになる事が多い。
フォントが小さくて、見難い場合でも我慢せよ（ijx の実行画面の並行表示を見よ）。

３．　sqrt, sin, cos, tan, cot,　exp, log（自然対数）の表現も可。

Dif_Equation のボックス入力例として
iii)　cos(x)　　　iv)　sin(x)　　　v) -cos(x)　　など
初期条件　Initial Position　として、逐次投入（色分け出力になるように）
0, 0、　0, 1、　0, 2、　0, _1、　0, _2　などを経験されたし。

３．　中　級

１．Dif_Equation として、ボックス入力例

(x^2)*sin(y)%(1+y^2)

i) Dir Field 方向場ベクトル　を描く事
ii) Initial Position 初期条件として
0, 0　　0, 1　　0, 2
0,_1　　0,_2　　　に対応する解曲線を描け（p.8　図１）

【註１】　Clear ボタンは一々使わぬ。　x_range や　y_range　ボタンは関係なし。
【註２】　この例題は１０余年昔の岩波講座「微分方程式の数値解法Ｉ」（文献４）pp.6-8 に「微分方程式の勾配場 gradient field（西川の方向場相当）」として、登場しているものである。　本稿末尾 p.8 の図１を参照。
この文献４は一見に値する。
西川プログラムは、この辺の実行を目指して居るものだろう。

４．　上　級

１．　x-range 、 y-range　の指定
_1, 100　　_2, 200　の類の指定を整数値でＫＢ入力し、リターン・キーを押す。　（小数点を付けると、ドメイン・エラーを発する。）
図の　ｘ，ｙ座標軸のスケールに、対応の表示が生ずる。

この　range 設定は、解の振る舞いを知らないと、結構、難しい。
下手をすると、肝心の図形部分が何処かに逃散して行方不明になりかねない。

【例】　　dy／dx ＝ 980 - 0.1*y^2
x は時間、y は速度、雨滴の落下（終末）速度 の微分方程式に相当する。
この解を図示して見よ。　（適当な条件値の設定が難しいかも？）

５．　難　問

１．　竹内コメント

最近の西川 FAX （H18.11.17、 文献７）で知った話。
１０月末の研究会、西川論文 （文献１）の発表早々、慶応大・竹内先生から次の如き質問があった。　さすがですな！

『 １階微分方程式　 y' =　-x／y　の場合、方向場のベクトル表示は良いとしても、解曲線については、問題が発生する。　つまり、初期条件　0, 2　の場合は予想通り綺麗な円が描かれるから良いが、それ以外の　0, 1　等については、Runge-Kutta法の逐次近似計算が暴走して、みっともないジグザグの解曲線になる事がある。
なんとか、暴走しない範囲で、計算を停止させたい！　方法は無いのか？』と。
たちまちの難問提出とは、いやはや、敬服します！

２．　西川の応対アイデア（文献７）

『 Runge-Kutta法の計算を、（x, y 直角座標）ではなくて 、（r, θ 極座標）で行うことによって、竹内問題を回避出来ないか？　そうすれば、一般的には、円や楕円の作図を一筆書きで描くことが可能となりで便利でもあろう。　しかし、自身では、トライしたが、簡単そうに見えて、うまく行かぬ。　（中野に）考えて欲しいと！』とあった。

３．　中野の考察（その１）　何故暴走するか？

ａ．　竹内コメントの微分方程式の数学的な一般解は、　容易に

(x^2 + y^2)／2 = C （積分常数）　　　であるから、

解曲線は、半径が　2C の平方根なる円に決まっている。
初期条件 0, 2 とすれば、上の　2C = 4 であるから、半径 ２ の円が解の筈。
演算では

y = √ （2^2 - x^2)　　x の範囲は　｜x｜≦ 2　である。

ｂ．初期条件 0, 1 とすれば、上の　2C = 1 であるから、半径 １ の円が解となるべき筈である。　演算では

y = √ （1^2 - x^2)　　を行う。

処が、 x の値が　｜x｜＞ 1　範囲になると、℃　内が負、即ち y が虚数となるので、計算は暴走する。

ｃ．　演算範囲　x の絶対値の上限値の指定法はあるか？

４．　中野の考察（その２）　　一筆書き法、　極座標法

極座標　 r(θ) にすれば、 θ の 上限値は、最大でも共通に　2π である。
上述、西川の「極座標」でのルンゲ・クッタ法のトライは、これを考慮したものであろう。

ｄ．　「楕円」直角座標での一筆書きプログラム例 （Ｊ５版）

```
 daen =: 3 : 0
(1,1) daen y.          NB. (y. - 1) が  分割数
:
            load 'plot'
```

```
a=.0{x.                NB.  x軸（長）経
b=.1{x.                NB.  y軸（短）経
iy=. y.                NB.  分割数の目安
x =. a*(1 % iy-1)* i. iy            NB.  x 座標値
y =.(b%a)*(%:((a^2)-x^2))           NB.  y 座標値
plot ((|.-x),x); ((((2, iy)$ |.y, -y)), "1((2, iy) $(-y), y))
)
```

ｅ．　極座標「楕円」の一筆書きプログラム例　（Ｊ５版）

```
 poldaen =: 3 : 0
(1, 1) poldaen y.     NB.  en
 :
        load 'plot trig'
a=. 0 { x.
b=. 1 { x.
th =. (o.2) % y.      NB. y. bunkatu-suu
thi =. th * i. (y. + 1)
x =. a * cos(thi)
y =. b * sin(thi)
plot x ; y            NB. J5 version
)
```

分割数（ y. 右引数）を　20　以上とすれば、一応、滑らかな曲線となる。
かくて、楕円程度の処理には、別に runge-kutta 法を用いる必要は無い。
しかし、処理法の変更や選択を、どうやって指示するのか？

５．　中野の考察（その３）　runge-kutta 法に固執すれば：

ｆ．平方根号内が「負」の場合を排除する必要がある。　その為に
西川プログラムの該当 Script の内、　名詞関数　rk =: 1 : 0　の
末尾付近に僅少の改訂を行う。

```
 xh =. (x+h)
 Yh =. (Y+h*(k1+(2*k2)+(2+k3)+k4)%6 )
 if. (|xh) >: (|PY) do.  Yh =. 0    end.
 xh, Yh
)
```

ここで、　PY　は　初期値　Initial Position の入力値　(X, Y) の後者　Y に
相当する値である。　例えば　0, 1　と入力した場合には　1　である。
即ち、 runge-kutta の近似計算中で、 xh の絶対値が　1 を超えれば、強制的に
Yh = 0　と化して、暴走を食い止めるものである。
ただし、　今は、値 1 を、二重の意味で使用しているので、必要がない他の例題
の場合に、予期せぬ混乱を生ずる。　その回避に必要な指定をするには
グラフィックの操作指定窓の個数を増す必要がある。
また、強制的に ０ に置き換えた部分は、図の座標の x 軸を（本来の青色から）
色変わりさせて仕舞う難がある。

ｇ．　エラー検知措置法：

i)　エラーがあったら、強制措置を採るようにも出来る。　例えば

```
try. Yh=. (Y+h*(k1+(2*k2)+(2+k3)+k4)%6 ) catch. Yh =. 0  end.
```

を用いよう。

しかし、runge-kutta 計算自身にエラーがあるのではないから、無効である。

ii) 虚数が発生を探知したら、同様に強制措置を採るようにも出来る。

```
im =: {:@+.
if. -.((im Yh) = 0) do. Yh =. 0 end.
```

しかし、runge-kutta 近似中に虚数が発生するわけでも無いらしく、有効ではなかった。

h. 繰り返し数の制限法：

iii) 西川 Scriptの Runge-Kutta の項に改訂を：
その先頭部分は

```
NB. inc (dif_eq) rk ^:(cycles) initial x, y
NB. 0.1 (dif 'y-x') rk ^: (i.11) 0 0
```

（このコメント文の先頭の増分 0.1 は、西川 Scriptの実行文の実際は 0.2 となっているが・・・） この NB.文を、そのまま借用の場合には
増分 inc =. （ x の最大値）% （（繰り返し数 cycles） - 1 ）
即ち 0.1 =. 1 % 10 相当の指定によって、 x の計算が余計な範囲に及ばないようにしても良い。
（前項 ｄ．の 楕円の作図例で見た如くに！）

さて、上の 繰り返し数 cycles の決め方は、西川 Script を手直しして

```
NB. DE numerical solution
dfield_sol_button =: 3 : 0
```

内の

```
wr cycle_a =. >: >.5*XRB
```

として

```
DA =. ........... ^: (i. cycle-a ) PX, PY
```

とする。

```
wr cycle_b =. >: >.5*-XRA
```

として

```
DB =. ........... ^: (i. cycle-b ) PX, PY
```

とする。

これを利用すれば良い。
しかし、この場合にも、（x の最大値）の指定は必要である。
従って、一般論としては、西川微分方程式グラフィックの操作窓、ボタンの個数は不足で、更に追加が必要であろう！

ｉ. ステップ幅の短縮法： 最終解決！

実際の「繰り返し数 cycles」は、今問題の竹内コメントの実行例では、初期値 設定に関係なく 21 である事が判った。
そして、初期値が 0, 2 、即ち y(x=0) = 2 の指定時には異常は無かった。
そこで、（中野は）次の如き対策を考えた。

iv) 西川 Scriptの Runge-Kutta の項の始め辺りで：

h =. x. の次行に h =. h * |PY % 4 を挿入する。
従来実際に採用されて来た h の絶対値は 0.2 であったから
意味は h =. 0.1 * |PY % 2 と置く事に相当する。
この時、初期条件が 0, 2 の如く第２項 PY = 2 であれば、ステップ幅は標準値の h = 0.1 である。 初期条件が 0, 1 の如く、PY = 1 に縮小すれば、ステップ幅は h = 0.05 と半減する。従って、同じ繰り返し回数でも変数 x の走査範囲は狭くなり、暴走には到る事は無い。
この様なプログラム改訂によって得られた実行画面を、末尾 p.8 の図２に示したが、 runge-kutta 近似計算中の暴走は、綺麗に無くなった。
また、 強制的 ０ 値化 に伴うｘ軸での色変わりも無い。

　また、他の問題に影響するなどの懸念も無い筈である。
実際、テストの結果では、初期値の指定値が小さい場合、解曲線の表示範囲が、若干狭くなることはあるが、指定値がより大きくなれば、表示範囲が拡大されて、支障は無くなる。　（元来の西川プログラムは、解曲線の表示範囲の大きさには、関心は無かった筈である。）

これで、竹内コメントは解決した。

ついでに、出題！

ｊ．　問題：　惑星運動で「面積速度一定の法則」、極座標での微分方程式

$r\ d\theta / dt = C / r$　　　から、楕円軌道を描けるか？

６．　む　す　び

　面白い西川論文に感激した。　今後、直ぐ考えられる拡張は「連立微分方程式」へのアプローチであろう（勿論、１階に限る）。
　Clear ボタンを押さないで操作すれば、２組以上の１階・微分方程式の方向場を示す事も可能である。　勿論、同じ変数名　x と y　を用いても、意味は異なる。解曲線が、色別されたのと違って、方向場は単色（ブラック）であるのが難であるが、連立方程式の傾向を汲み取れる場合があるかも知れない。
　ただし、初期条件を入れて得られる解曲線は、今のトライの最後に投入した式に対応するもののみであって、連立に相当するものでは無い。
　今後の発展には、ＪＡＰＬＡの会友諸賢の御奮闘を期待したい。

文　　　献

１）　西川利男：　「Ｊによる微分方程式のグラッフィック・アプローチ（その１）
１階常微分方程式 － 数値解と方向場表示の活用」JAPLA資料
2006/10/28 pp.9　Script （Ｊ３．０５Ｃ）
－ａ．　西川：　同上 Script 追加　pp.7　（Ｊ３．０５Ｃ）
２）　中野嘉弘　ＦＡＸ（H18.11. 2 pm. 0:00）西川 Script への改訂案　pp.7
（Ｊ５０４ｂ）　nnsdf3.ijs

３）　西川利男ＦＡＸ（'06.11.3　pm.0:35）中野改訂版有効、実行例を送る。　pp.7

４）　三井たけ友「微分方程式の数値解法Ｉ」岩波講座　応用数学［方法３］pp.116
1993.9.8 （全１４巻　第５回配本）
５）　西川利男ＦＡＸ（'06.11.15 am.9:14）　Ｊ４，Ｊ５版原稿、　連名希望
６）　中野嘉弘　ＦＡＸ（H18.11.17 金）　tutorials の提案
７）　西川利男ＦＡＸ（'06.11.17 pm.4:36）　竹内コメント。
ルンゲ・クッタ法を極座標で。

図１　岩波講座・勾配場：上（実行経過の例示）
図２　竹内難問を解決　：下（解曲線）
次ページへ

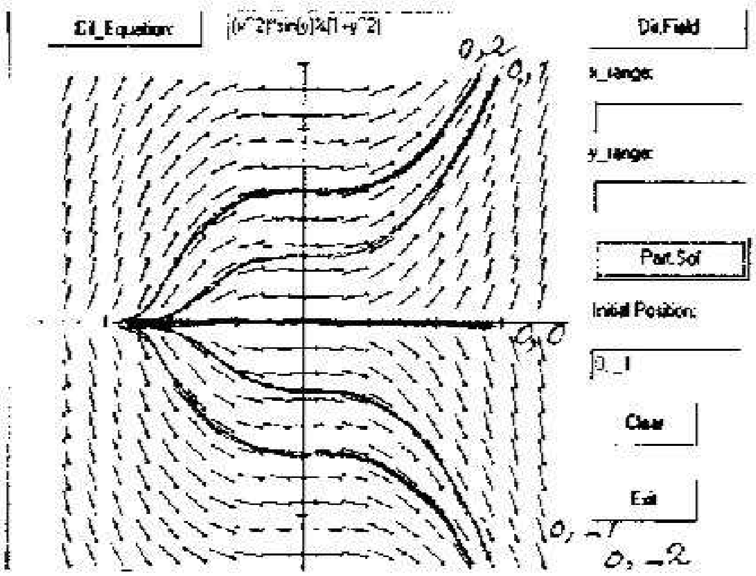

図１　岩波講座・勾配場（実行経過の例示）

！ dfield_DE_button ！　ボタン
Eq ＝
-x/y　　　微分方程式右辺

！ dfield_go_button ！　ボタン
df　　　処理関数名
y in
-x/y　　　　　入力式
y out
0"_ -(0&{)%(1&{)　演算式
！ dfield_POS_button ！　ボタン
0　2　　　初期条件　0, 2
！ dfield_sol_button ！　ボタン
COLOR: icol ＝ 1　　赤色
cycle_a ＝ 21　　繰り返し回数 a
cycle_b ＝ 21　　繰り返し回数 b

次段へ
！ dfield_POS_button ！
0　1　　　初期条件　0, 1
！ dfield_sol_button ！
COLOR: icol ＝ 2　ピンク色
次段へ
！ dfield_POS_button ！
0　_0.5　　初期条件　0, _0.5
！ dfield_sol_button ！
COLOR: icol ＝ 3　緑色
次段へ
！ dfield_POS_button ！
0　_4　　　初期条件　0, _4
！ dfield_sol_button ！
COLOR: icol ＝ 4　ライトグリーン

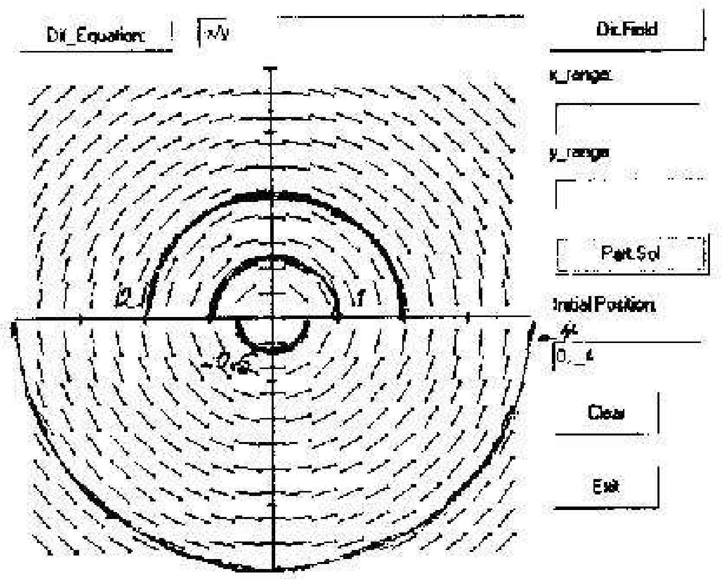

図２　　竹内難問を解決（解曲線）