Ｊ　と　確率微分方程式入門

EXCEL、 **LOTUS**、 三四郎　＆　Ｊ

中野嘉弘　**83**才　（札幌市）

FAX 専 011-588-3354　　**e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp**

入門的理解は、以下の様で良いかな？
確率微分方程式は、トレンド項（ゆっくりした傾向）と揺動項（ランダム）を持つ。
解析解が可能だったのは２種類の場合のみ。　その好例がブラック・ショウルズの公式。
時系列からの数値解には **EXCEL** などの表計算が有効。　**EXCEL**の長所は正規分布関数の常備（無いソフトでも別に数表を見れば可）。　Ｊの出番をどう期待するか？

０．　は　し　が　き

蓼科合宿の西川ＦＡＸに「確率微分方程式」の話題が注目されたとあった（文献１）。
あまり意識せずに居たところ、新聞等で「ガウス賞に伊藤清京大名誉教授」の記事を見た（文献２、３）。
刺激されて、私（中野）は　ＪＡＰＬＡのホームパイジを探したが、慶応大学のそれには、何と該当する「夏の合宿報告」は無く、志村氏のサイトで、やっと片鱗を知った。
竹内先生の報告（文献３）は読めたが（式ばかり？で唖然！）、高山君の方は題目のみで本文は見られぬ。　そのアップロードをお願いして、最近、どうやら見る事が出来た。　（文献４）
調べて見ると、６０余年昔の戦時中の伊藤清先生のお仕事が発端らしい。　しかも、全国紙上数学談話会とか云う、小さな活動でのパンフレット報告とか。
そう云えば、私が北大理学部の学生の頃、この伊藤先生の確率の論文を眺めた記憶がある。　資料があった筈？と我が乱雑書庫内を探したが、見つからぬ。
やむなく、その後の資料を用いて、伊藤理論の入門をなぞって見た。　その一端のメモを残して置きたい。　次報以降に、多少はマシな事を書ければと思うが、今はウオーミング・アップと云うところ。

１．　入門書　さまざま

入門書で有名なのは、岡山出身の数理物理屋・保江ヤスエ邦夫博士の ブルーバックス内の著書、**2000**年 **4**月刊「**Excel** で学ぶ金融市場予測の科学（副題：市場を動かす中心金融定理 **Central Finance Theorem** とは何か）」とその続編、殆ど同じ名前で **2003**年**10**月刊の新版「最新・**Excel**で学ぶ金融市場予測の科学（副題：ブラック・ショールズ理論完全制覇）」（文献５－ａ、－ｂ）である。　いずれもＥｘｃｅｌが主役であるが「最新」版の方が、ずっと入門的に親切で、判り易い。
もう一種には、数学者・石村夫妻の「金融・証券のための　ブラック・ショールズ微分方程式」**1999**年刊（文献６）がある。　これ又、Ｅｘｃｅｌ　が首座にあり、「乱数の作り方」、「ランダムウオークの作り方、描き方」、「**Excel** で描くフーリエ級数」など、興味深いアプローチが示されている。

Excel には無関係だが、石村原著内の２ページをＪの数値計算でおさらいして見せた例が、我が会友・志村氏によって、既に報告されていると、最近、横浜の老友・山下紀幸氏から報告と資料のＦＡＸがあった（文献６－ａ、－ｂ）。
志村報告には時系列グラフは無いが、Ｊの大先輩、**Eugene McDonnell** の関連報告等について、付言があった（文献７）。　同巧だとも。
ブラックは故・ **Fischer Black**（**1938-1995**）で元来は物理学者、**1964**年に、応用数学でハーヴァード大学の **PhD.**を得た。　我が **APL/J** の **K.E.Iverson** と同じだな！
ショウルズは　**Myron Scholes** （**1941-**）で、１９９７年にノーベル経済学賞を得た。
詳しくは　**http://bradley.bradley.edu/~arr/bsm/pg07.html** （文献７－ａ）で！
判り易い解説の他に、両大先生人の顔写真まで見る事が出来る。
数学書では岩波講座「応用数学　２　確率と確率過程」楠岡成雄担当（**1993**年**5**月）（文献８）と同じく岩波講座「現代数学の基礎　５　確率微分方程式」船木直久（**1997**年 **2**月）（文献９）があり、「伊藤の公式」や「ブラウン運動、ウイーナー過程」などが見える。 しかし、直に Ｊ言語との関連 が見い出される如きものでは無い。
より新しい資料は、インターネットのウェブ・サイトから探すのが賢明らしい。

いろんな話題があるが、見通しを良くする為に、まず公式を示し、 Ｅｘｃｅｌ などはその後としよう。

２．　志村氏　の　数値計算例など

ブラック・ショウルズの公式は、判り易い **BRADLEY** のウェブ・サイト（文献７－ａ）によれば

Ｃ ＝ Ｓ・Ｎ（ｄ１） － Ｘ・ｅｘｐ（**-r(T-t)**）・Ｎ（ｄ２）

ｄ１ ＝（ｌｎ（Ｓ／Ｘ）＋ （**r + s^2／2**）・**t** ）／ **s √t**

ｄ２ ＝ ｄ１ － **s √t**

意味は　Ｃ　**Call option premium**　コール・オプションの追加価格
Ｓ　**current Stock price**　現在の株価
Ｘ　**option striking price**　オプション権利行使価格
T - t　**time until option expiration**　余時間
r　**risk-free interest rate**　非危険利子率
s　**standard deviation of stock returns**　儲けの標準偏差　次の **v** と同じ
又は　**v**　**volatility**　ヴォラテイリテイ　上の **s** と同じ
Ｎ　**cumulative standard normal distribution**　標準正規累積分布
ｅｘｐ　**exponential term (2.7183)**　指数関数
ｌｎ　**natural logarithm**　自然対数

この公式は、石村夫妻の原著（文献６）の **pp.186-187** に、数値例と共に示されている。　その標準正規累積分布（**Excel** 関数では **NORMDIST**相当 ）をＪ言語で計算して見せたところが志村報告の味噌であった。
それには、Ｊの会友・鈴木義一郎先生著の「Ｊ言語による統計分析」（文献１０）の
p.46 の　累積正規分布積分関数　　**ndf1 =: 0.5&+@(**ndfs)**　　ただし

```
ndfs =: 3 : '-:h*(ndens 0)+ndens y.)+ndens y.)+h*+/ndens (>:i.249)*h=.|y.%250'
ndens =: 3 : '(^--:*y.)%%:o.2'
```

等（または、その書き直し）を用いれば良い。

石村夫妻および志村の計算例のデータは
Ｓ ＝ **14500**、 Ｘ ＝ **14000**、 Ｔ － **t** ＝ （２ヶ月）＝ ２／１２ ＝ **0.1667**
s ＝ （３８％） ＝ **0.38**、 **r** ＝ （６％） ＝ **0.06** で
結果 Ｃ は **1232.0844** とされた。

● **VECTOR**誌（文献７）の **McDonnell**氏の報告では、**Fortran** や Ｃ言語 など ２５種のプログラム例が示されている。 数学ソフト **Maple** や **Mathematica** の他に、高級電卓 **HP48** もある。 それらと共に、Ｊ言語での計算例が８種ほどあり、 例えば
標準正規累積分布関数 として **cumulative standard normal distribution**
cnd =: [:-:1:+[:erf%&(%:2) ただし **erf =: (*&(%:4p_1)%^@:*:)*[:1 H. 1.5*:**
を使用する。 ここで、接続詞 **H.** は **Hypergeometric series** 超幾何級数の利用をする。 詳しくは **Ewart Shaw** の論文を見られよ。 （文献 **7-a**）
ＢＳ公式の計算関数は、 余時間を **T**（年単位）、**v** （ヴォラテリテ）として

```
BS =: monad define
      'S X T y v' =. y.
     d =. ((^.S%X)+T*r(+,-)-:*:v)%v*%:T
     -/(S,X*^-r*T) * cnd d
)
```

データ **yc =. 14500 14000 0.1667 0.06 0.38** として
ＢＳ計算 **BS yc** の結果は、直に
1233.18 である。
もし、データの最後、ヴォラテリテ **v** の「符号を負」にした
yp =. 14500 14000 0.1667 0.06 _0.38 では
計算 **BS yp** の結果はマイナスで **_593.854** となる。

正負は、オプション取引 **Option Transaction** での **Call**（購入）と **Put** （売却）の区別を示すらしいが、金融に弱い私には、これ以上は判らぬ。 コメントを乞う。

● Ｅｘｃｅｌ の標準正規累積分布関数 **NORMDIST** を利用では
保江氏の新編（文献５－ｂ）**pp.239-242** の手法を踏襲しよう。

A1セル に	**BS** 志村			
A3セル に	**X** 購入予定金額	**B3**セル	に	**14000**
A4セル に	**S** 原資産現在価	**B4**セル	に	**14500**
A5セル に	**T-t** 余時間	**B5**セル	に	**0.1667**
A6セル に	**r** 安全債券利回り	**B6**セル	に	**0.06**
A7セル に	**v** ヴォラテイリティ	**B7**セル	に	**0.38**
A9セル に	**C** オプション価格	**B9**セル	に	計算式と結果を予定

B9セル に 計算式を入力
=B4*NORMDIST((LN(B4)-LN(B3)+(B6+0.5*B7*B7)*B5/(B7*SQRT(B5)),0,1,TRUE)-B3*EXP(-B6*B5)*NORMDIST((LN(B4)-LN(B3)+(B6-0.5*B7*B7)*B5/(B7*SQRT(B5)),0,1,TRUE)

エンター・キーを押せば、瞬時に答 **1233.183** が、Ｂ９セル に現れる。
この **B9** の計算式をＪ言語で表す事も容易である。 その結果でも同じ値であった。
比較する。 Ｊの **B9** での答 **1233.18**
McDonnellの **BS**での答 **1233.18**
Ｊの志村の計算値 **1233.08**
先の石井夫妻値 **1232.0884** 一致は良い。

石井原著（文献６）にミスプリントが無ければ、差異は主に、標準正規累積分布関数の計算の僅かの違いからであろうか？

いずれにしても、与えられた公式の数値計算である。　初等代数の根の公式からの計算見たいなものだ。　しかし、ブラック・ショウルズ（ＢＳ）公式が、どのように使われるものかを、知るのには有効である。
　しかし、金融工学では、このブラック・ショウルズ公式のを改良案が多く提案されている。　つまり、ＢＳ公式は、確率微分方程式の内、最初に簡単に解けた例なのだ。

３．　Ｅｘｃｅｌ　での　入門

　以下の例題が、多くのペイジに丁寧に解説されている。
一部の計算例（標準正規累積分布関数によるオプションの計算法）は直前で述べた。

１）保江（**2000**年版）疑似乱数の作成　**p.75, 78, 79, 85, 86**
確率分布　**p.88, 90, 91, 92, 93, 94, 97, 98,**
p.100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107,
正規確率分布　**p.108, 110, 111, 112, 113, 115, 117,**
p.118, 119, 120, 121, 122, 123
モンテカルロ　**p.127, 128, 129**
確率微分方程式　**p.133, 134, 135, 136, 137, 138, 140, 141**
p.157
平均株価予測　**p.148, 149, 150, 152, 154**
トレンド予測　**p.161, 163, 164, 165**
Volatility　ボラティリティ予測　**p.168, 169, 170, 172, 173, 174, 176**

２）保江（**2003**年新版）平面グラフ　**p.71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,**
p.80, 81, 82, 83, 84, 86
立体グラフ　**p.99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106,**
p.111, 116, 117, 118, 120, 121,
幾何線形確率過程　**p.167, 169, 171, 172**
偏微分方程式の数値解　**p.184, 190, 191, 194, 195**
ブラックショールズ公式
からモンテカルロ法へ　**p.240, 243, 248, 250, 251, 252**
【重大なる脚註 **p.69**】 使い勝手は　Ｅｘｃｅｌ より　Ｌｏｔｕｓ が良い！

３）石村＋石村（**1999**年版）
乱数の作り方　**p. 32, 44, 66**
ランダムウオークの
つくり方と描き方　**p. 84, 94**

Ｅｘｃｅｌで描く
フーリエ級数　**p. 116, 128, 150, 188, 200, 201**

　私（中野）は　Ｅｘｃｅｌ Ｖ．７（Ｗｉｎ９５版）で、逐一トライした。
解説は原著に詳しいので、語る必要は無かろう（省く）。
　しかし、例えば「乱数」計算を、セル　**A2**　から　**A101** へ、或いは **A202** へ、時には **2001**番へまでも、マウスで「ドラグせよ」などには、範囲が広過ぎて「参った、参った」の仕儀になる。　かくては、Ｌｏｔｕｓ　がベターとなりかねない。
上記の　２）の内、【重大なる脚註 **p.69**】の如くである。
Ｌｏｔｕｓについて、私のトライした事は、次節　３．にて述べる。

上に登場した石村＋石村の「ブラック・ショールズ微分方程式」（文献６）を出版した東京図書社の広告を見れば、**1996-1997**年頃までは「すぐわかる **EXECEL**による ・・・・」シリーズと並んで「すぐわかるロータス**1-2-3/W** による・・・・」ものが見えていた。　その後、広告が見えなくなったのは、何か激烈な裏競争のせいか？
有効性の評判はロータスが或いは上かも知れぬ？
国産ソフト「一太郎」とＷＯＲＤの関係と同じか？　ユーザーも賢明でなくちゃ！

４．　Ｌｏｔｕｓ　で　やれば

LOTUS の **WINDOWS**版が 関数 **DLL** のトラブルで使用不可だったので、超古典的な **DOS**版 **Lotus1-2-3 Release 2.2J** （**1988**年）を用いた。　**FD** １枚だが、用は足りる。
マウスも使わず、矢印キーでセル移動をする。

● 算術関数　アドマーク＠で始まる。

乱数（**0** と **1** の間）	**@RAND**
平方根	**@SQRT**
円周率 パイ	**@PI**
正弦（サイン）	**@SIN(　)**
余弦（コサイン）	**@COS(　)**

セルへの算術計算入力は プラス記号 **+** で始まる（**Excel** では　等号　**=** であった）。

メニュー呼出はスラッシュ記号　／　キー

（ドラグ）コピー法の例　　複写元　セル番号の　**A2**　など
複写先　セル番号　　**A3..A202**　の類を指定。
リターン・キーを押したとたんに、複写が完了
（ドラグが不要なので、**Excel** より　圧倒的に軽便・迅速）

● グラフ操作　　／　**G** グラフ　で始まる。

種類	**X**	**x** 座標用
	その他は　**y** 座標用で色分け　**A B C D E F**　６種類	
描画	**V**	
印刷	**P**	

これだけ知っていれば、用は足りる。

保江氏、　石村＋石村氏　の著書中の例題の処理を例示するのは簡単な事だ。

５．　通称・三四郎　で　やれば

EXCEL や　**LOTUS** で出来る事は、国産の表計算ソフト（一太郎・花子の兄弟、三四郎こと）ジャスト三四六でも可能な事は自明であろう。　それにわざわざ言及した本も見た事もある。　私のトライしたのは「ジャスト三四六 **Ver.**１．１／Ｒ．２」 **for Windows** ９５　と　ＡＴＯＫ８ものである（文献１０）。

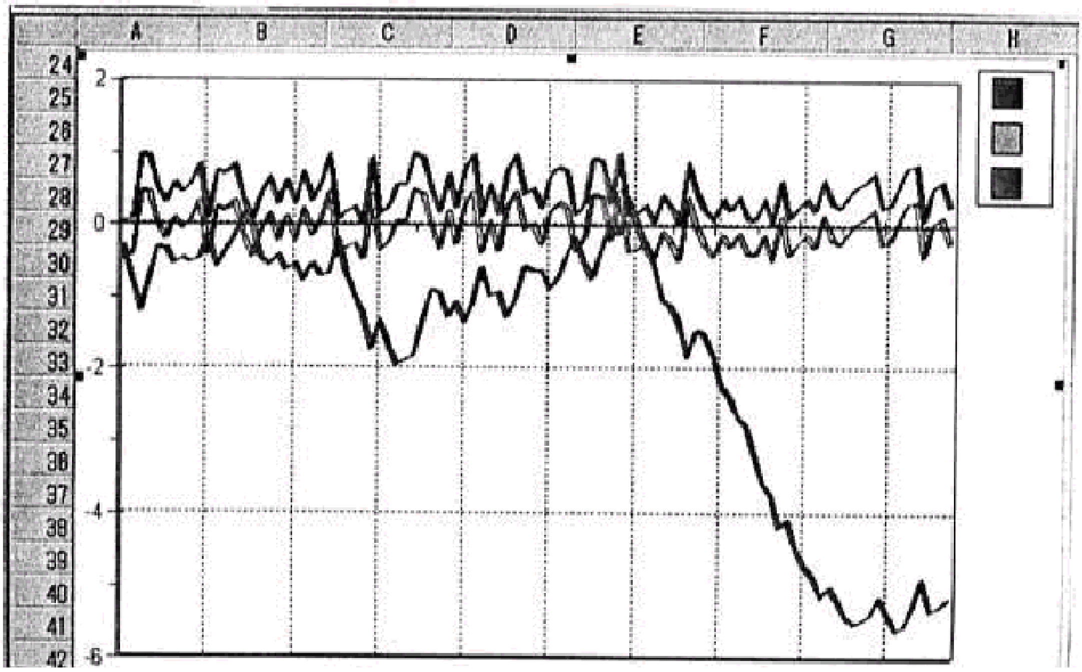
●算術関数　等号 =　で始める。　関数名の先頭は大文字。
乱数（**0** と **1** の間）　**Rand()**
任意のセルに編集があると、常に再計算される
平方根　**Sqrt(数値)**
円周率 パイ　**Pi()**
正弦（サイン）　**Sin(数値)**
余弦（コサイン）　**Cos(数値)**
（用意されている統計関数の種類は少ない。）
ドラグ・コピー法の例　**Excel** と全く同様、ドラグが必要。

● グラフ操作　ツールバー　グラフ・アイコンボックスのクリックで始まる。
または、**SHIFT + CTRL + F.4** キーで。　図は綺麗である。

三四郎による「ランダム・ウオーク」の図

上は原乱数（Ａのセル）、中はそれから **0.5** を引いたもの（Ｂのセル）、下の急傾斜のもの（Ｃのセル）が求めるランダム・ウオークである。　これは、高山氏の報告（文献４）の表現では「確率１／２の単純対称型のランダム・ウオークと呼ばれる。

(図 i36067, 122kB)



６．　Ｊ 言語　の　グラフ機能では

ＪＡＰＬＡであるから、Ｊ言語での処理例を示さなければ終わらぬ。
解析解（ブラック・ショウルズＢＳの公式）のフォロウの計算では、主力は累積正規分布であった。　これは、初等統計学の教科書の末尾の付録を見れば、用は足りる（例えば文献１２）。

時系列の方を扱おう。　肝心な点は、表計算ソフトでは、乱数に関係したセルは、そのシート内で、乱数の編集があれば、すべて「自動的に再計算される」事を、Ｊ言語でも忘れ無い事である。

例として、保江氏の「新編　**Excel** で金融市場予測」（文献５－ｂ） **p.247** 以降に登場する「ファインマン・カッツ **Feynman-Kac** ＦＫ公式」を採る。
かの有名な物理学者・ファインマンである。　そう云えばブラックも物理屋、元来、ブラウンやウィーナーも然りである。
場の量子論に於ける「ファインマンの経路積分」にヒントを得て、カッツが拡散方程式に応用したものである。　カッツは数学史の大著でも知られる。
これを、さらに拡張したものに「カメロン・マーチン **Cameron-Martin** の公式」なるものもある。　皆、例のブラウン運動関係の話である。
昨年出版の岩波の「数学入門辞典」（文献１３）を見られたい。

保江氏が **Excel** のシート上でやった作業に近寄せて、Ｊ言語で処理しよう。

名前

A1=. 'Black-Sholes -> Feynman-Kac formula '

A3 =. 'option striking price K= '
A4 =. 'current stock price x= '
A5 =. 'time until option expiration t*= '
A6 =. 'risk-free interest rate r= '
A7 =. 'volatility v= '　　　　※　ギリシャ文字 **sigma** σ の代わり

定数値（志村のトライ値、 文献６－ａ）

b3 =: 14000
b4 =: 14500
b5 =: 0.1667
b6 =: 0.06
b7 =: 0.38

セルへの代入

E列　（平均 **0** 標準偏差 **1** の標準疑似正規乱数　**2000**ケ）
e =: rand12y 2000
e2 =. 0 { e　　先頭値
D列　（ファインマン・カッツ公式に対応）
d =. D2 2000
d2 =. 0 { d　　先頭値
C列　（正値選択 **= IF(D2>0, D2, 0)** に対応）
c =. C2 d
c2 =. 0 { c　　先頭値

関数　**rand12y, D2, C2**　などは末尾に。

プロット　（予め、コマンド　**load 'plot'**　を忘れるな！）

plot (i.2000) ; (3 2000 $ c, d, e)　　**2000**ケ　データでは、図はベタ潰し

最初の　**100**ケ　データ　を採る。　図は下掲。

plot (i.100) ; (100 {. "1 (3 2000 $ c, d, e))

平均値・標準偏差

mesdv　100 {. c　　->　1237.51　　　1663.29
mesdv　100 {. d　　->　560.702　　　2350.49
mesdv　100 {. e　　->　0.0433915　　1.038

オプション購入価額

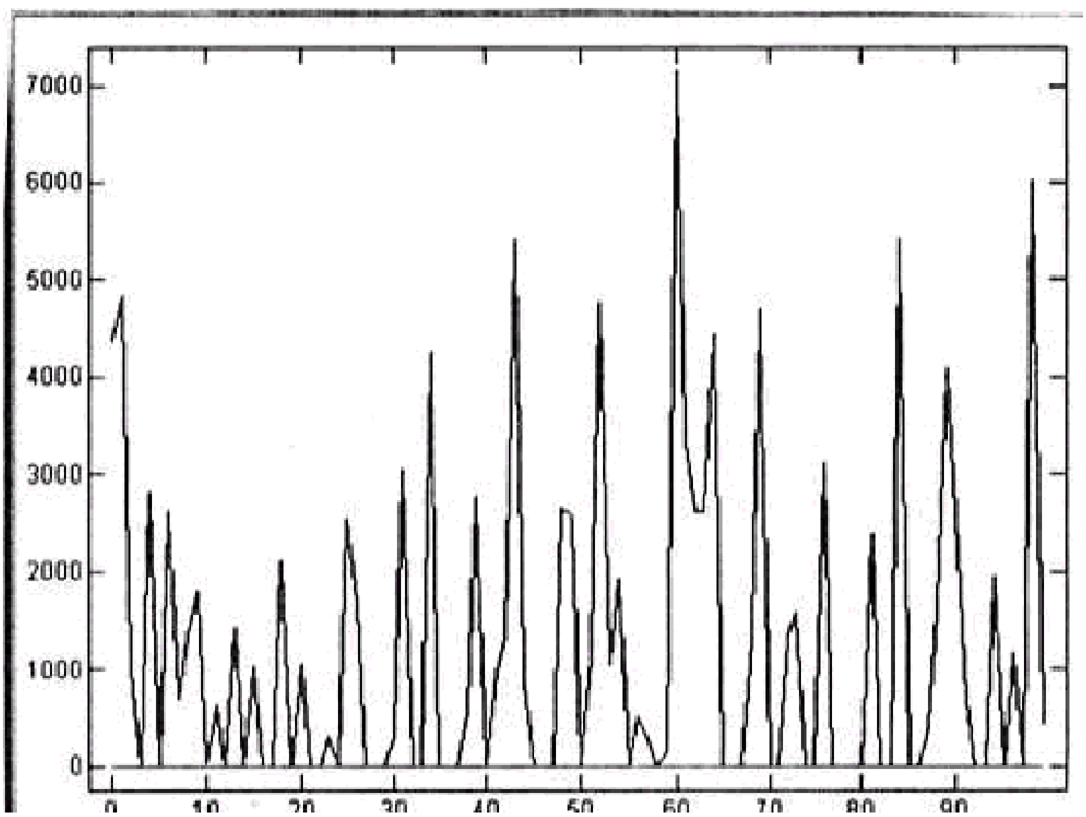
（**C** の平均値）*** exp (-b6*b5)　->　1237.51 * 0.990048　-> 1225.1943**

考察

前節２．の志村等の結果では、オプションの購入価額は　**1232.09** 〜 **1233.18** であった。　積の指数関数項が　**0.990**〜 **0.997** の影響であるから、納得出来る.

保江氏の別な例題でも、ＢＳ公式値　**314.302**、 ＦＫ公式値　**313.8118**　であり、多少は減額されている。　　指数関数との積が僅かだが効いている。

Ｊ言語がこんなに有効に使えるとは！
また逆に、ＢＳ公式でもＦＫ公式でも殆ど同じ結果を与える。　恐らく、カメロン・マーチン　**Cameron-Martin** ＣＭ 公式でも、小差のみか？
多少の改良？などは無駄かな？　　　　　　　　　　　**(図 i36066, 110kB)**



む　す　び

今朝の新聞で見た記事（平１８．１０．１８木、Ｙ紙）「東京大学でも、遅ればせながら 金融工学 の学科を開設予定だ」と。
株価のシュミレーションをやるのか？　ルベーグ測度論や拡散方程式の数値実験を目指すのか？　忙しい事になりそうだ！　又もや、Ｅｘｃｅｌが独り勝ちするかな？

お願いが一つ：　確率変数の独立性を仮定して議論を始める流儀を見ますが、その必要な（使用するデータの）独立性を検定する方法を教えて下さい。
また、それは事象の独立性とは区別すべし（無関係？）との議論も見たが、どうもはっきりしない。　困惑しています。　宜しく！

....

```
rnd7s =: 3 : 0
 ? y. $ 10000000
:
 (y.?1)
)

randd7 =: 3 : '(10^_7)*rnd7s y.'

randy  =: 3 : '(+/ rndd7 y.)-6'
```

```
rand12y =: 3 : 0
  ry =. randy 12
   i =. 0
 while. i< y. -1  do.
   ry =. ry, randy 12
    i =. i+1
 end.
     ry
)
```

```
D2 =: 3 : 0
   y=.0
   i=.0
  y=.(b3*^(((^.b4)-^.b3)+((b6-0.5*b7*b7)*b5)-((b7*%:b5)*0{e)))-b3
      i=.1
 while. i< y. do.
y=.y, (b3*^(((^.b4)-^.b3)+((b6-0.5*b7*b7)*b5)-((b7*%:b5)*i{e)))-b3
     i=.i+1
 end.
  y
)
```

```
C2 =: 3 : 0
  y =. y.
 (y>0) * y
)
```

```
NB. from Suzuki J-Math 1996 p.81
     meana =: +/%#
    var =: [:meana[:*:(-meana)
    sdev =: [:%: var
    mesdv =: meana, sdev
```

文　　献

１）西川ＦＡＸ（平**18.8.09.pm.5:32**）微分方程式と云うと　**JAPLA** の最近の話題は
確率微分方程式、ブラック・ショールズの式とやら、マネー・金融
で持ちきりです。　蓼科でも、志村、竹内、高山（慶応学生）と３件。
物理など自然科学の話題を心待ちにしています。

２）読売紙 **H18.8.23**（水）**p.1**　　「初代ガウス賞伊藤氏　９０才」
同　　**p.32**　　「金融革命生んだ方程式」デリバティブ価格決定に応用
同　**H18.8.24**（木）**p.1** 「編集手帳」夏は算数の季節 。
フィールズ賞（ポアンカレ予想）とガウス賞（伊藤清さん **90**才）

３）竹内寿一郎：「ブラック・ショールズのオプション価格の式について」Ｊ蓼科合宿
2006年 **8**月 **5**〜 **7**日、 **pp.5**

４）高山武士：「ブラウン運動と確率微分方程式」Ｊ蓼科合宿、**2006/8/5~7**、**PP.13**

５－ａ）保江邦夫：「**Excel** で学ぶ金融市場予測の科学 － 市場を動かす中心金融
定理　**Central Finance Theorem** とは何か）」講談社　ブルーバックス
B-1286　2000.4.20

５－ｂ）保江邦夫：　「最新・**Excel** で学ぶ金融市場予測の科学 － ブラック・
ショールズ理論完全制覇」　講談社　ブルーバックス
B-1422　2003.10.20

６）石村貞夫＋石村園子：「金融・証券のための　ブラック・ショールズ微分方程式」
東京図書　**1999.9.27**

－ａ）志村正人：「ブラック・ショールズのプログラム」**JAPLA** シンポ **2000/12/16**
pp.5

上記の石村著の **p.140** 以下の習作であるらしい。　しかし **Black-Scholes** その他
翻訳名と共に原名も示して欲しかった。

－ｂ）山下ＦＡＸ（**H18.9.06-07**）伊藤清様第１回 **Gauss** 賞関連の「Ｊの資料は
志村報告　**JAPLA** シンポ **2000**」 のみらしい。　　志村報告の電子版が「欠」
との事、複写ＦＡＸを送信して差し上げます」と。

７） **E. McDonnell : " At Play With J: Beware Scholes! "　VECTOR Jan 2003**
pp.137-142

－ａ）**E. Shaw: " Hypergeometric Functions and CDFs in J ", VECTOR Apr 2002**
ここに　**CDF** は **cumulative distribution function** 。　　**pp.139-142**

８）楠岡成雄：岩波講座「応用数学　２　確率と確率過程」**1993.5.14**

９）船木直久**:**岩波講座「現代数学の基礎　５　確率微分方程式」**1997.2.7　pp.185**

１０）鈴木義一郎：「Ｊ言語による統計分析」森北出版、**1996**、**$ 2.14** 正規分布 **p.46**

１１）**JUSTSYSTEM**社三四郎「表計算ソフト・ジャスト三四六 **for Windows 95**」**1996**年

１２）安川数太郎・米田桂三：「初等統計学演習」東京同文書院、昭和４０年改訂８版
数値表 **p.257** 累積正規分布表

１３）岩波「数学入門辞典」岩波書店、 **2005.9.28**発行、 **p.503, p.106**
Feynman-Kac 公式、 **Cameron-Martin**　公式。
残念にも、**Black-Scholes** の公式の方はこの辞典には見えぬ。