

# J と 確率微分方程式入門

EXCEL、LOTUS、三四郎 & J

中野嘉弘 83才 (札幌市)

FAX 専 011-588-3354 e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

入門的理解は、以下の様で良いかな？

確率微分方程式は、トレンド項（ゆっくりした傾向）と揺動項（ランダム）を持つ。解析解が可能だったのは2種類の場合のみ。その好例がブラック・ショールズの公式。時系列からの数値解には EXCEL などの表計算が有効。EXCELの長所は正規分布関数の常備（無いソフトでも別に数表を見れば可）。Jの出番をどう期待するか？

## 0. は し が き

蓼科合宿の西川FAXに「確率微分方程式」の話題が注目されたとあった（文献1）。あまり意識せず居たところ、新聞等で「ガウス賞に伊藤清京大名誉教授」の記事を見た（文献2、3）。

刺激されて、私（中野）は JAPLAのホームページを探したが、慶応大学のそれには、何と該当する「夏の合宿報告」は無く、志村氏のサイトで、やっと片鱗を知った。

竹内先生の報告（文献3）は読めたが（式ばかり？で唾然！）、高山君の方は題目のみで本文は見られぬ。そのアップロードをお願いして、最近、どうやら見る事が出来た。（文献4）

調べて見ると、60余年昔の戦時中の伊藤清先生のお仕事が発端らしい。しかも、全国紙上数学談話会とか云う、小さな活動でのパンフレット報告とか。そう云えば、私が北大理学部学生の頃、この伊藤先生の確率の論文を眺めた記憶がある。資料があった筈？と我が乱雑書庫内を探したが、見つからぬ。やむなく、その後の資料を用いて、伊藤理論の入門をなぞって見た。その一端のメモを残して置きたい。次報以降に、多少はマシな事を書ければと思うが、今はウォーミング・アップと云うところ。

## 1. 入門書 さまざま

入門書で有名なのは、岡山出身の数理物理屋・保江ヤスエ邦夫博士のブルーボックス内の著書、2000年4月刊「Excelで学ぶ金融市場予測の科学（副題：市場を動かす中心金融定理 Central Finance Theorem とは何か）」とその続編、殆ど同じ名前で2003年10月刊の新版「最新・Excelで学ぶ金融市場予測の科学（副題：ブラック・ショールズ理論完全制覇）」（文献5-a、-b）である。いずれもExcelが主役であるが「最新」版の方が、ずっと入門的に親切で、判り易い。

もう一種には、数学者・石村夫妻の「金融・証券のための ブラック・ショールズ微分方程式」1999年刊（文献6）がある。これ又、Excelが首座にあり、「乱数の作り方」、「ランダムウォークの作り方、描き方」、「Excelで描くフーリエ級数」など、興味深いアプローチが示されている。

Excel には無関係だが、石村原著内の 2 ページを J の数値計算でおさらいして見せた例が、我が会友・志村氏によって、既に報告されていると、最近、横浜の老友・山下紀幸氏から報告と資料の FAX があった（文献 6-a、-b）。

志村報告には時系列グラフは無いが、J の大先輩、Eugene McDonnell の関連報告等について、付言があった（文献 7）。同巧だとも。

ブラックは故・Fischer Black (1938-1995) で元来は物理学者、1964年に、応用数学でハーヴァード大学の PhD.を得た。我が APL/J の K.E.Iverson と同じだな！

ショウルズは Myron Scholes (1941-) で、1997年にノーベル経済学賞を得た。

詳しくは <http://bradley.bradley.edu/~arr/bsm/pg07.html> (文献 7-a) で！

判り易い解説の他に、両大先生人の顔写真まで見る事が出来る。

数学書では岩波講座「応用数学 2 確率と確率過程」楠岡成雄担当 (1993年5月) (文献 8) と同じく岩波講座「現代数学の基礎 5 確率微分方程式」船木直久 (1997年 2月) (文献 9) があり、「伊藤の公式」や「ブラウン運動、ウイナー過程」などが見える。しかし、直に J 言語との関連が見い出される如きものではない。  
より新しい資料は、インターネットのウェブ・サイトから探すのが賢明らしい。

いろんな話題があるが、見通しを良くする為に、まず公式を示し、Excel などはその後としよう。

## 2. 志村氏の数値計算例など

ブラック・ショウルズの公式は、判り易い BRADLEY のウェブ・サイト (文献 7-a) によれば

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot \exp(-r(T-t)) \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = (\ln(S/X) + (r + s^2/2) \cdot t) / s \sqrt{t}$$

$$d_2 = d_1 - s \sqrt{t}$$

意味は C Call option premium コール・オプションの追加価格

S current Stock price 現在の株価

X option striking price オプション権利行使価格

T - t time until option expiration 余時間

r risk-free interest rate 非危険利子率

s standard deviation of stock returns 儲けの標準偏差 次の v と同じ

又は v volatility ヴォラティリティ 上の s と同じ

N cumulative standard normal distribution 標準正規累積分布

exp exponential term (2.7183) 指数関数

ln natural logarithm 自然対数

この公式は、石村夫妻の原著 (文献 6) の pp.186-187 に、数値例と共に示されている。その標準正規累積分布 (Excel 関数では NORMDIST 相当) を J 言語で計算して見せたところが志村報告の味噌であった。

それには、J の会友・鈴木義一郎先生著の「J 言語による統計分析」(文献 10) の p.46 の 累積正規分布積分関数 `ndf1 =: 0.5&+@(**ndfs)` ただし

`ndfs =: 3 : '-:h*(ndens 0)+ndens y.)+ndens y.)+h*/ndens (>:i.249)*h=.|y.%250'`

`ndens =: 3 : '^--:*y.)%%:o.2'`

等 (または、その書き直し) を用いれば良い。

石村夫妻および志村の計算例のデータは  
 $S = 14500$ 、 $X = 14000$ 、 $T - t = (2\text{ヶ月}) = 2/12 = 0.1667$   
 $s = (3.8\%) = 0.38$ 、 $r = (6\%) = 0.06$  で  
 結果  $C$  は  $1232.0844$  とされた。

● VECTOR誌 (文献7) の McDonnell氏の報告では、Fortran や C言語 など 25種のプログラム例が示されている。数学ソフト Maple や Mathematica の他に、高級電卓 HP48 もある。それらと共に、J言語での計算例が8種ほどあり、例えば標準正規累積分布関数として cumulative standard normal distribution

`cnd = [::1:+[:erf%&(%:2) ただし erf = (*&(%:4p_1)%^@:*)*[:1 H. 1.5*:`  
 を使用する。ここで、接続詞 H. は Hypergeometric series 超幾何級数の利用をする。詳しくは Ewart Shaw の論文を見られよ。(文献 7-a)

BS公式の計算関数は、余時間を  $T$  (年単位)、 $v$  (ヴォラテリテ) として

```
BS =: monad define
    'S X T y v' =. y.
    d =. ((^S%X)+T*r(+,-)-:v)%v*%:T
    -(S,X*^-r*T) * cnd d
)
```

データ `yc =. 14500 14000 0.1667 0.06 0.38` として  
 BS計算 `BS yc` の結果は、直に  
 $1233.18$  である。

もし、データの最後、ヴォラテリテ  $v$  の「符号を負」にした  
`yp =. 14500 14000 0.1667 0.06 _0.38` では  
 計算 `BS yp` の結果はマイナスで  $_{593.854}$  となる。

正負は、オプション取引 Option Transaction での Call (購入) と Put (売却) の区別を示すらしいが、金融に弱い私には、これ以上は判らぬ。コメントを乞う。

● Excel の標準正規累積分布関数 NORMDIST を利用では  
 保江氏の新編 (文献 5-b) pp.239-242 の手法を踏襲しよう。

A1セル	に	BS 志村		
A3セル	に	X 購入予定金額	B3セル	に 14000
A4セル	に	S 原資産現在価	B4セル	に 14500
A5セル	に	T-t 余時間	B5セル	に 0.1667
A6セル	に	r 安全債券利回り	B6セル	に 0.06
A7セル	に	v ヴォラテリテイ	B7セル	に 0.38
A9セル	に	C オプション価格	B9セル	に 計算式と結果を予定

B9セル に 計算式を入力  
 $=B4*NORMDIST((LN(B4)-LN(B3)+(B6+0.5*B7*B7)*B5/(B7*SQRT(B5))),0,1,TRUE)$   
 $-B3*EXP(-B6*B5)*NORMDIST((LN(B4)-LN(B3)+(B6-0.5*B7*B7)*B5/(B7*SQRT(B5))),0,1,TRUE)$

エンター・キーを押せば、瞬時に答  $1233.183$  が、B9セル に現れる。  
 この B9 の計算式を J言語で表す事も容易である。その結果でも同じ値であった。  
 比較する。 J の B9 での答  $1233.18$   
 McDonnellの BSでの答  $1233.18$   
 Jの志村の計算値  $1233.08$   
 先の石井夫妻値  $1232.0884$  一致は良い。

石井原著（文献6）にミスプリントが無ければ、差異は主に、標準正規累積分布関数の計算の僅かの違いからであろうか？

いずれにしても、与えられた公式の数値計算である。初等代数の根の公式からの計算見たいなものだ。しかし、ブラック・ショウルズ（BS）公式が、どのように使われるものかを、知るのには有効である。

しかし、金融工学では、このブラック・ショウルズ公式のを改良案が多く提案されている。つまり、BS公式は、確率微分方程式の内、最初に簡単に解けた例なのだ。

### 3. Excel での 入門

以下の例題が、多くのページに丁寧に解説されている。  
一部の計算例（標準正規累積分布関数によるオプションの計算法）は直前で述べた。

- 1) 保江（2000年版）疑似乱数の作成 p.75, 78, 79, 85, 86  
確率分布 p.88, 90, 91, 92, 93, 94, 97, 98,  
p.100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107,  
正規確率分布 p.108, 110, 111, 112, 113, 115, 117,  
p.118, 119, 120, 121, 122, 123  
モンテカルロ p.127, 128, 129  
確率微分方程式 p.133, 134, 135, 136, 137, 138, 140, 141  
p.157  
平均株価予測 p.148, 149, 150, 152, 154  
トレンド予測 p.161, 163, 164, 165  
Volatility ボラティリティ予測 p.168, 169, 170, 172, 173, 174, 176
  
- 2) 保江（2003年新版）平面グラフ p.71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,  
p.80, 81, 82, 83, 84, 86  
立体グラフ p.99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106,  
p.111, 116, 117, 118, 120, 121,  
幾何線形確率過程 p.167, 169, 171, 172  
偏微分方程式の数値解 p.184, 190, 191, 194, 195  
ブラックショールズ公式  
からモンテカルロ法へ p.240, 243, 248, 250, 251, 252  
【重大なる脚註 p.69】 使い勝手は Excel より Lotus が良い！
  
- 3) 石村+石村（1999年版）  
乱数の作り方 p. 32, 44, 66  
ランダムウォークの  
つくり方と描き方 p. 84, 94  
  
Excelで描く  
フーリエ級数 p. 116, 128, 150, 188, 200, 201

私（中野）は Excel V. 7 (Win95版) で、逐一トライした。  
解説は原著に詳しいので、語る必要は無かろう（省く）。

しかし、例えば「乱数」計算を、セル A2 から A101 へ、或いは A202 へ、時には 2001番へまでも、マウスで「ドラグせよ」などには、範囲が広過ぎて「参った、参った」の仕儀になる。かくては、Lotus がベターとなりかねない。  
上記の 2) の内、【重大なる脚註 p.69】の如くである。

Lotus について、私のトライした事は、次節 3. にて述べる。

上に登場した石村+石村の「ブラック・ショールズ微分方程式」(文献6)を出版した東京図書社の広告を見れば、1996-1997年頃までは「すぐわかる EXCELによる・・・」シリーズと並んで「すぐわかるロータス1-2-3/Wによる・・・」ものが見えていた。その後、広告が見えなくなったのは、何か激烈な裏競争のせいかな？有効性の評判はロータスが或いは上かも知れぬ？国産ソフト「一太郎」とWORDの関係と同じか？ユーザーも賢明でなくちゃ！

#### 4. Lotus で やれば

LOTUS の WINDOWS版が 関数 DLL のトラブルで使用不可だったので、超古典的なDOS版 Lotus1-2-3 Release 2.2J (1988年)を用いた。FD 1枚だが、用は足りる。マウスも使わず、矢印キーでセル移動をする。

- 算術関数 アドマーク@で始まる。

乱数 (0 と 1 の間)	@RAND
平方根	@SQRT
円周率 パイ	@PI
正弦 (サイン)	@SIN( )
余弦 (コサイン)	@COS( )

セルへの算術計算入力は プラス記号 + で始まる (Excel では 等号 = であった)。

メニュー呼出はスラッシュ記号 / キー

(ドラッグ) コピー法の例 複写元 セル番号の A2 など  
複写先 セル番号 A3..A202 の類を指定。  
リターン・キーを押したとたんに、複写が完了  
(ドラッグが不要なので、Excel より 圧倒的に軽便・迅速)

- グラフ操作 / G グラフ で始まる。

種類	X	x座標用							
		その他は	y座標用で色分け	A	B	C	D	E	F
描画	V								
印刷	P								

これだけ知っていれば、用は足りる。

保江氏、石村+石村氏 の著書中の例題の処理を例示するのは簡単な事だ。

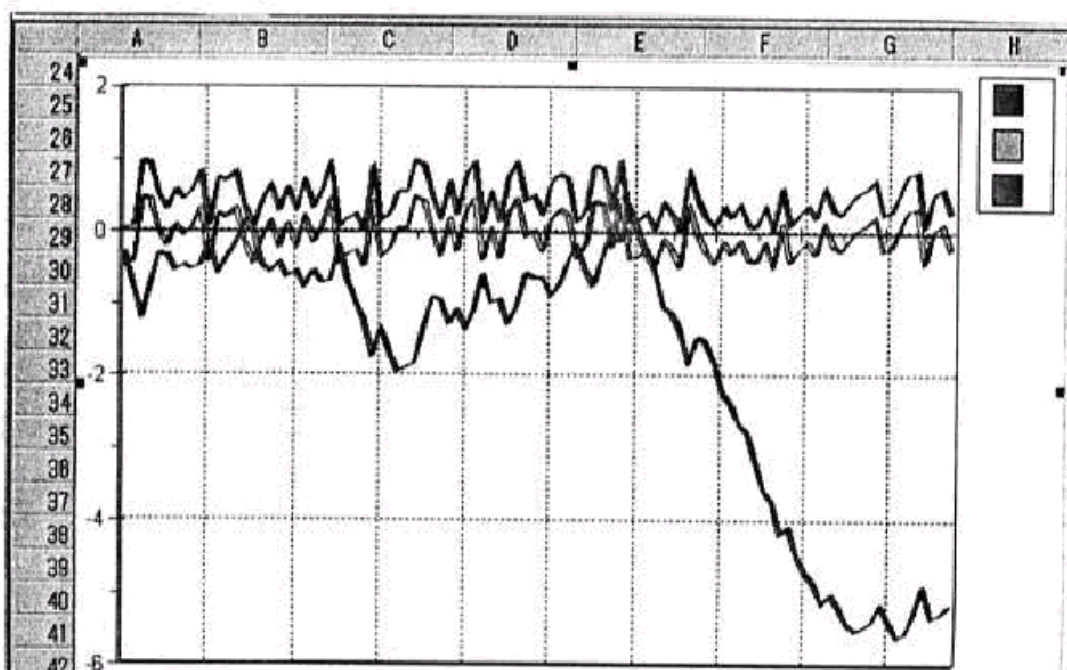
#### 5. 通称・三四郎 で やれば

EXCEL や LOTUS で出来る事は、国産の表計算ソフト (一太郎・花子の兄弟、三四郎こと) ジャスト三四六でも可能な事は自明であろう。それにわざわざ言及した本も見た事もある。私のトライしたのは「ジャスト三四六 Ver. 1. 1/R. 2」for Windows 95 と ATOK 8 ものである (文献10)。

- 算術関数 等号 = で始める。 関数名の先頭は大文字。  
 乱数 (0 と 1 の間)    **Rand()**  
 任意のセルに編集があると、常に再計算される  
 平方根                    **Sqrt(数値)**  
 円周率 パイ                **Pi()**  
 正弦 (サイン)               **Sin(数値)**  
 余弦 (コサイン)             **Cos(数値)**  
 (用意されている統計関数の種類は少ない。)  
 ドラグ・コピー法の例       **Excel** と全く同様、ドラグが必要。
- グラフ操作    ツールバー    グラフ・アイコンボックスのクリックで始まる。  
 または、**SHIFT + CTRL + F.4** キーで。    図は綺麗である。

三四郎による「ランダム・ウォーク」の図

上は原乱数 (Aのセル)、中はそれから 0.5 を引いたもの (Bのセル)、下の急傾斜のもの (Cのセル) が求めるランダム・ウォークである。これは、高山氏の報告 (文献4) の表現では「確率 1/2 の単純対称型のランダム・ウォークと呼ばれる。」  
 (図 i36067, 122kB)



6. J 言語 の グラフ機能では

JAPLAであるから、J言語での処理例を示さなければ終わらぬ。解析解 (ブラック・ショウルズBSの公式) のフォロウの計算では、主力は累積正規分布であった。これは、初等統計学の教科書の末尾の付録を見れば、用は足りる (例えば文献12)。

時系列の方を扱おう。肝心な点は、表計算ソフトでは、乱数に関係したセルは、そのシート内で、乱数の編集があれば、すべて「自動的に再計算される」事を、J言語でも忘れ無い事である。

例として、保江氏の「新編 Excel で金融市場予測」(文献5-b) p.247 以降に登場する「ファインマン・カッツ Feynman-Kac F K公式」を採る。

かの有名な物理学者・ファインマンである。そう云えばブラックも物理屋、元来、ブラウンやウィーナーも然りである。

場の量子論に於ける「ファインマンの経路積分」にヒントを得て、カッツが拡散方程式に応用したものである。カッツは数学史の大著でも知られる。

これを、さらに拡張したものに「カメロン・マーチン Cameron-Martin の公式」なるものもある。皆、例のブラウン運動関係の話である。

昨年出版の岩波の「数学入門辞典」(文献13)を見られたい。

保江氏が Excel のシート上でやった作業に近寄せて、J言語で処理しよう。

名前

A1=. 'Black-Sholes -> Feynman-Kac formula '

A3 =. 'option striking price K= '

A4 =. 'current stock price x= '

A5 =. 'time until option expiration t\*=' '

A6 =. 'risk-free interest rate r= '

A7 =. 'volatility v= ' ※ギリシャ文字 sigma  $\sigma$  の代わり

定数値(志村のトライ値、文献6-a)

b3 =: 14000

b4 =: 14500

b5 =: 0.1667

b6 =: 0.06

b7 =: 0.38

セルへの代入

E列 (平均 0 標準偏差 1 の標準疑似正規乱数 2000ケ)

e =: rand12y 2000

e2 =. 0 { e 先頭値

D列 (ファインマン・カッツ公式に対応)

d =. D2 2000

d2 =. 0 { d 先頭値

C列 (正值選択 = IF(D2>0, D2, 0) に対応)

c =. C2 d

c2 =. 0 { c 先頭値

関数 rand12y, D2, C2 などは末尾に。

プロット (予め、コマンド load 'plot' を忘れるな!)

plot (i.2000) ; (3 2000 \$ c, d, e) 2000ケ データでは、図はベタ潰し

最初の 100ケ データ を採る。 図は下掲。

plot (i.100) ; (100 {."1 (3 2000 \$ c, d, e))

平均値・標準偏差

mesdv	100 { . c	->	1237.51	1663.29
mesdv	100 { . d	->	560.702	2350.49
mesdv	100 { . e	->	0.0433915	1.038

オプション購入価額

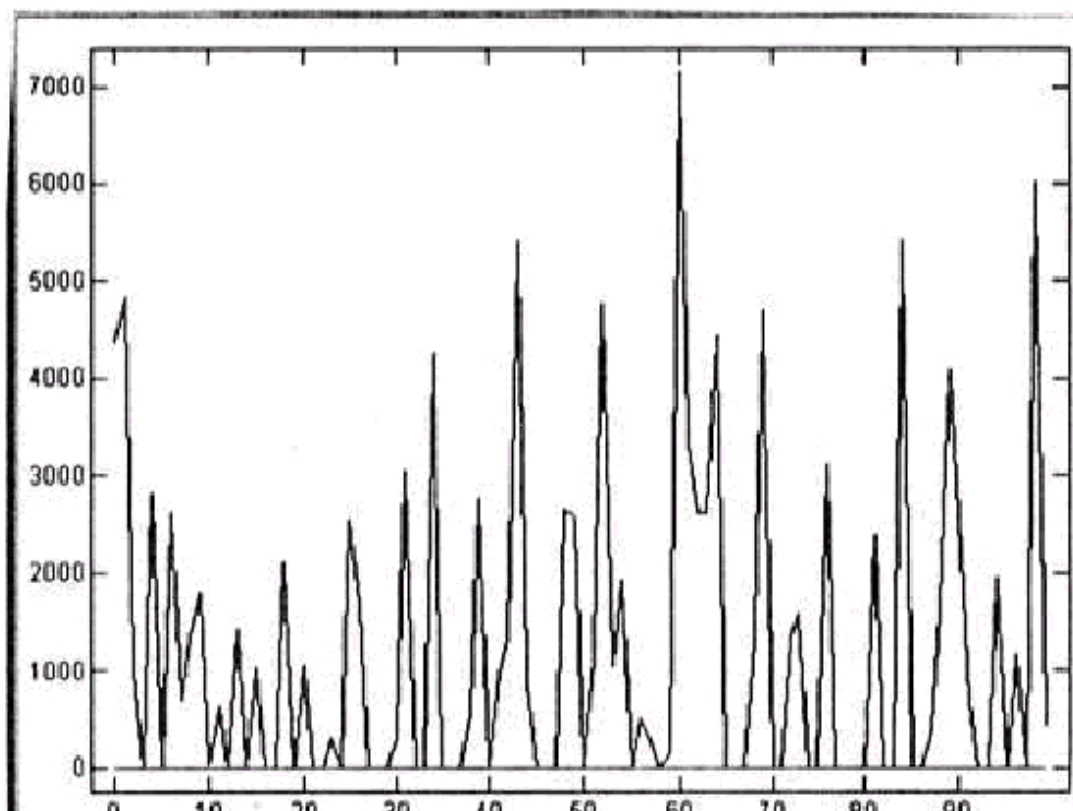
(C の平均値) \* exp (-b6\*b5) -> 1237.51 \* 0.990048 -> 1225.1943

考察

前節 2. の志村等の結果では、オプションの購入価額は 1232.09 ~ 1233.18 であった。積の指数関数項が 0.990 ~ 0.997 の影響であるから、納得出来る。保江氏の別な例題でも、BS 公式値 314.302、FK 公式値 313.8118 であり、多少は減額されている。指数関数との積が僅かだが効いている。

J 言語がこんなに有効に使えるとは！  
また逆に、BS 公式でも FK 公式でも殆ど同じ結果を与える。恐らく、カメロン・マーチン Cameron-Martin CM 公式でも、小差のみか？  
多少の改良？などは無駄かな？

(図 i36066, 110kB)





む す び

今朝の新聞で見た記事（平18.10.18木、Y紙）「東京大学でも、遅ればせながら 金融工学 の学科を開設予定だ」と。

株価のシュミレーションをやるのか？ ルベージ測度論や拡散方程式の数値実験を目指すのか？ 忙しい事になりそうだ！ 又もや、Excelが独り勝ちするかな？

お願いが一つ： 確率変数の独立性を仮定して議論を始める流儀を見ますが、その必要な（使用するデータの）独立性を検定する方法を教えてください。  
また、それは事象の独立性とは区別すべし（無関係？）との議論も見たが、どうもはっきりしない。 困惑しています。 宜しく！

.....

```

rnd7s =: 3 : 0
  ? y. $ 10000000
  :
  (y.?1)
)

randd7 =: 3 : '(10^_7)*rnd7s y.'

randy =: 3 : '(+/ rndd7 y.)-6'

rand12y =: 3 : 0
  ry =. randy 12
  i =. 0
  while. i < y. -1 do.
    ry =. ry, randy 12
    i =. i+1
  end.
  ry
)

```

```

D2 =: 3 : 0
  y=.0
  i=.0
  y=.(b3*^(((^b4)-^b3)+((b6-0.5*b7*b7)*b5)-((b7*%:b5)*0{e)))-b3
  i=.1
  while. i < y. do.
y=.y, (b3*^(((^b4)-^b3)+((b6-0.5*b7*b7)*b5)-((b7*%:b5)*i{e)))-b3
  i=.i+1
  end.
  y
)

```

```

C2 =: 3 : 0
  y =. y.
  (y>0) * y
)

```

NB. from Suzuki J-Math 1996 p.81

```

meana =: +/%#
var =: [:meana[:*(-meana)
sdev =: [:%: var
mesdv =: meana, sdev

```

## 文 献

- 1) 西川 FAX (平18.8.09.pm.5:32) 微分方程式と云うと JAPLA の最近の話題は確率微分方程式、ブラック・ショールズの式とやら、マネー・金融で持ちきりです。蓼科でも、志村、竹内、高山(慶応学生)と3件。物理など自然科学の話題を心待ちにしています。
- 2) 読売紙 H18.8.23 (水) p.1 「初代ガウス賞伊藤氏 90才」  
同 p.32 「金融革命生んだ方程式」デリバティブ価格決定に応用  
同 H18.8.24 (木) p.1 「編集手帳」夏は算数の季節。  
フィールズ賞(ポアンカレ予想)とガウス賞(伊藤清さん 90才)
- 3) 竹内寿一郎:「ブラック・ショールズのオプション価格の式について」J蓼科合宿  
2006年 8月 5~7日、 pp.5
- 4) 高山武士:「ブラウン運動と確率微分方程式」J蓼科合宿、2006/8/5~7、PP.13
- 5-a) 保江邦夫:「Excel で学ぶ金融市場予測の科学 - 市場を動かす中心金融定理 Central Finance Theorem とは何か」講談社 ブルーバックス  
B-1286 2000.4.20
- 5-b) 保江邦夫:「最新・Excel で学ぶ金融市場予測の科学 - ブラック・ショールズ理論完全制覇」講談社 ブルーバックス  
B-1422 2003.10.20
- 6) 石村貞夫+石村園子:「金融・証券のための ブラック・ショールズ微分方程式」  
東京図書 1999.9.27  
- a) 志村正人:「ブラック・ショールズのプログラム」JAPLA シンポ 2000/12/16  
pp.5  
上記の石村著の p.140 以下の習作であるらしい。しかし Black-Scholes その他  
翻訳名と共に原名も示して欲しかった。  
- b) 山下 FAX (H18.9.06-07) 伊藤清様第1回 Gauss 賞関連の「Jの資料は  
志村報告 JAPLA シンポ 2000」のみらしい。志村報告の電子版が「欠」  
との事、複写 FAXを送信して差し上げます」と。
- 7) E. McDonnell: " At Play With J: Beware Scholes! " VECTOR Jan 2003  
pp.137-142  
- a) E. Shaw: " Hypergeometric Functions and CDFs in J ", VECTOR Apr 2002  
ここに CDF は cumulative distribution function 。 pp.139-142
- 8) 楠岡成雄:岩波講座「応用数学 2 確率と確率過程」1993.5.14
- 9) 船木直久:岩波講座「現代数学の基礎 5 確率微分方程式」1997.2.7 pp.185
- 10) 鈴木義一郎:「J言語による統計分析」森北出版、1996、\$ 2.14 正規分布 p.46
- 11) JUSTSYSTEM社三四郎「表計算ソフト・ジャスト三四六 for Windows 95」1996年
- 12) 安川数太郎・米田桂三:「初等統計学演習」東京同文書院、昭和40年改訂8版  
数値表 p.257 累積正規分布表
- 13) 岩波「数学入門辞典」岩波書店、2005.9.28発行、p.503, p.106  
Feynman-Kac 公式、Cameron-Martin 公式。  
残念にも、Black-Scholes の公式の方はこの辞典には見えぬ。