立方根から１１乗根までの電卓計算から Ｊへ

Ｊ　の有効度の　テスト

中野嘉弘　83才　（札幌市）

FAX 専 011-588-3354　　e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

０．　は　し　が　き

３乗根とか５乗根の多桁計算は案外、難物である。　（文献１）
最近、あるＷｅｂで「小数 1.1 の５乗根を求める方法を知りたい」との質問と、解答として電卓で処理する方法が目についた。
ニュートン法万能主義では、気付かない面白さがあったので、紹介並びにその拡張を述べたい。

１．　５乗根の電卓計算

質問「 (1.1000 ÷ 1,000) の５乗根を電卓計算する方法は？」　（文献２）
回答「カシオ科学技術用電卓（ 逆数キー「1/x」のあるもの）なら出来る（文献３）。
詳しくは、下記　ＵＲＬ（文献４）を参照下さい。
質問から回答まで、僅かに　３０分、親切なものです。
その答は「電卓の神々たち　その華麗なる技（その２）」なる表題付きの如く、やや神がかり的で、素直には判り難い（我が　ＪＡＰＬＡ　にも、その傾向があるかもと云われないように心しよう）。　以下は中野による、つたない？解説：

解説１：　使用可の電卓は２種
ａ）　逆数キー [1/x] があるもの
ｂ）　逆数キー [1/x] の無い場合： k タイプの電卓を使え。
k タイプとは： ++、 --、 xx、 ÷÷、　の如く、同じ演算記号を２回続ける演算が可能なもの。　その際、画面の一偶に　小さく文字 k が出て消えるので k タイプ　(k 型)　と呼ばれることがある。

演算例　　数値 ２ について説明する。
ａ：　2 [1/x]　と押せば　0.5 となる。
ｂ：　2 ÷÷ 1 =　と押せば　0.5 となる。

解説２：　５乗根　の演算のやり方　（電卓タイプ　ａ　にて示す）
以下の演算記号列で、句読点　、　と　、　の間に挟まっているのが、演算の　１　ステップである。　それを繰り返す。
なお、句読点自身は、入力の対象では無い。

1 、 [1/x]　x 2 = √√、　[1/x]　x 2 = √√、・・・・・

第１ステップの後の値（５乗根の期待値は１０桁で）1.18920.... である。
第２ステップの後の値（５乗根の期待値は１０桁で）1.1387..... である。
第３ステップの後の値（５乗根の期待値は１０桁で）1.1511..... である。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

第１３ステップの後の値（５乗根の期待値は１０桁で）1.148698355 である。
なお、回答（文献４）での回答は　1.148698354997　（１３桁）に収束する筈であるとなっている。　互いに満足すべきであろう。

電卓ｂ（[1/x]を欠き、２重演算でやる場合）での例は、次節　２．　立方根の場合で述べる。

２．　立方根の電卓計算

回答（文献３、４）には、５乗根しか述べて居ない。　累乗根の計算は、素数次についてのみやれば良い。　順序は逆になったが、３乗根の場合のやり方を述べる。
実は、後に、姉妹編「電卓の神々たち　（その１）」（文献５）にある事を発見した。
省略する理由も無いので、一応、解説しよう。
７次以上の場合は、次節以降に述べる。

立方根のアルゴリズム

実は、アルゴリズムとして、 [1/x]が不要なので、電卓タイプ　ａ，ｂ　には関係しない。

解説：　３乗根　の演算のやり方

以下の演算記号列で、句読点　、　と　、　の間に挟まっているのが、演算の　１　ステップである。　それを繰り返す。
なお、句読点自身は、入力の対象では無い。

1 、　x 2 = √√、　x 2 = √√、・・・・・

第１ステップの後の値（３乗根の期待値は１０桁で）1.189207115 である。
第２ステップの後の値（３乗根の期待値は１０桁で）1.241857812 である。
第３ステップの後の値（３乗根の期待値は１０桁で）1.255380757 である。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

第１３ステップの後の値（３乗根の期待値は１０桁で）1.259921046 である。
別な「カシオ社の科技電卓 VX-3」での、立方根値は CUR 2 -> 1.25992105　９桁で

あるから、 互いに満足すべし。

３．　７乗根　の　場合

著者（中野）の工夫によれば、この場合でも、
３乗根の場合の平方根号 √ を １つ 増して ３ケ とするだけで良い。
演算の処方は

1 、　x 2 =　√√√、　x 2 =　√√√、・・・・・

第１ステップの後の値（７乗根の期待値は１０桁で）**1.090507733** である。
第２ステップの後の値（７乗根の期待値は１０桁で）**1.102382583** である。
第３ステップの後の値（７乗根の期待値は１０桁で）**1.103876003** である。
1.104062823
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.104086177**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.104089097**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.104089462**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **89507**
513
14
14
14
第１３ステップの後の値（７乗根の期待値は１０桁で）　**1.104089514** である。
Ｊ言語での単精度演算では　**7 %: 2**　**1.10409**　である。
拡張精度演算から小数値を求めれば（文献２の流儀）　**1.104089513673**　で
あるから、 互いに満足すべし。

４．　１１乗根　の場合

素数乗根で、７次の次は　１１　である。　一工夫欲しいところであるが、著者（中野）が気が付いたところでは、３乗　と　逆数キーが必要になり、
乗演算処方は

1 、 [x ^3]、[1/ x]　x 2 =　√√√ 、　・・・・・

第１ステップの後の値（１１乗根の期待値は１０桁で）**1.055645178** である。
第２ステップの後の値（１１乗根の期待値は１０桁で）**1.068586077** である。
第３ステップの後の値（１１乗根の期待値は１０桁で）**1.063714753** である。
1.065538892
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.064854473**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.065111079**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **1.065014845**
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ **50931**
37399
42473
0571
1284
最終収束値（１１乗根の期待値は１０桁で）は　**1.065041089** である。
Ｊ言語での単精度演算では　**11 %: 2**　**1.06504**　である。
Ｊ多倍長演算から小数値を求めれば（中野の流儀）　**1.065041089439**　で

あるから、 互いに満足すべし。

この先、１３乗根以上の件と、Ｗｈｙ？ は読者諸賢のトライに任せよう。

５． 数値 ３、４、５ の ３、５、７、１１ 乗根

Ｊの単精度以外の **k**型電卓の例 とＪの多倍長は、著者（中野）流のものである。

	数	立方根	５乗根	７乗根	１１乗根
Ｊ 単精度	３	**1.44225**	**1.24573**	**1.16993**	**1.10503**
	４	**1.5874**	**1.31951**	**1.21901**	**1.13431**
	５	**1.70998**	**1.37973**	**1.2585**	**1,15756**
k型電卓例	３	**1.442249444**	**1.24573094**	**1.169930813**	**1.105031383**
	４	**1.587401052**	**1.319507911**	**1.219013654**	**1.134312367**
	５	**1.709975946**	**1.37972966**	**1.25849895**	**1.157557981**
Ｊ 多倍長	３	**1.442249570307**	**1.245730939615**	**1.169930812758**	**1.105031503396**
	４	**1.587401051968**	**1.319507910772**	**1.219013654204**	**1.134312522195**
	５	**1.709975946676**	**1.379729661461**	**1.258498950641**	**1.157557911770**

６． ベキ乗関数 の 利用

電卓の機能に、ベキ乗 即ち **[x^y]** の類がある場合には、例えば
3 = [x^y] 0.2 = -> 1.24573094 で、逐次計算を経ずに、一挙に
「３ の ５乗根」の同じ答（上掲）が得られる。
同じ類に演算記号 ↑ によって **[x^y]** と同巧のベキ乗を行う電卓もある。 例は
Casio FX-780P （昭和６１年頃の科学技術用電卓）がある。
これらに於いて、内部の演算方式は、案外、今まで述べて来たような、逐次近似法を利用しているかも知れぬ。

１） ２ の ３乗根の場合

√√ ２ EXE -> 1.189207115 (0) ２．節参照

ANS * ２ EXE (1)
√√ ANS EXE -> 1.241857812 (2) ２．節参照

以下、 **(1)** ～ **(2)** を反復すれば、逐次近似になる。 ２．節参照

２） ２ の ５乗根の場合

√√ ２ EXE -> 1.189207115 (0) １．節参照

ANS ↑-1 EXE -> 0.8408964153 (1)
ANS * ２ EXE -> 1.681792831 (2)
√√ ANS EXE -> 1.138788635 (3) １．節参照

以下、 **(1)** ～ **(3)** を反復すれば、逐次近似になる。 １．節参照

とにかく、 **k** 型電卓を含め、電卓による逐次近似法とは、電卓併用の（ある種の）手計算の例だと理解出来る。　かくして、話は面白くなる！

７．　　むすび

昔は（太平洋戦争前の話）、大学を卒業せずとも、文部省の検定試験だけで教員免許が取得出来た。　それを文検（モンケン、旧制、師範・中学校・女学校教員検定）とか高検（旧制・高等学校教員検定）と呼んだ。
文検の数学科の問題例を挙げる。　第１０回（明治３０年）のものである。

「二項定理を用い　**3^5 - 2**　の　５乗根を小数第５位まで計算せよ。」

勿論、手計算である。　電卓も　Ｊ　言語も使わずにでやる事！

ちゃんと解答出来たら、実力派教員でありましょうな！
百年も前には、こんな事もありました。

文　献・資　料

１）中野嘉弘：「立方根筆算の記憶から多倍長割算へ」 **JAPLA/Sep/30** 投稿　中野（その１）

２）質問日　**2006/9/8 10:11:42**　「**twins777jam**さん：Ｙａｈｏｏ　知恵袋」

３）回答日　**2006/9/8 12:37:16**　「**the18percentgray**さん：Ｙａｈｏｏ　知恵袋」

４）**http://www.nishinet.ne.jp/~math/mr_boo/dentaku3.htm**

５）　〃　**/DENTAKU1.HTM**