立方根筆算の記憶から多倍長割算へ

Ｊ の 拡張精度除法の仕上げ

中野嘉弘　83才　（札幌市）

FAX 専 011-588-3354　e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

０．　は　し　が　き

防災の日の起源である関東大震災の年に私（中野嘉弘）は生まれた。　懐かしい母校（北海道の旧制中学）は、尾張・徳川藩が蝦夷地開拓家臣団の子弟の為に、資金を提供して発足したものであった。　その開校が私の生年であるので、何かと思い出す事が多い。　開校幾周年などの記念日が永遠について回る幸運である。
数学教師に軍司義成と云う先生が居られた。　１年生の頃、代数学の時間に平方根の求め方を習った。　生意気な中学生の私は、即座に、その先の「立方根」の求め方を質問した。　今の中学生も、こんな生意気な事を考えるかな？

数日後に、職員室に呼び出されて、軍司先生から「立方根」計算法の手ほどきを受けた。　かなり、難しい話であったとの記憶だけが残った。
旧制高等学校（北大予科）では、微分法の、いわゆるニュートン法で、立方根の求解を知ってからは、筆算の奥義は忘れて仕舞った。

その後は、有能なる電卓・パソコン・数学ソフトに頼るので、益々、無縁となった。
先日、旧制中学の同窓会誌に「思い出話」を依頼されて、久ぶりに考えた。
「ハテ、どうやったっけ？」と。

数日間、努力した事を、書留めたので、御披露しよう。　余り、目をむく如き話ではあるまいと思うが、読者の皆様におかれましては、名案が御座いますれば、老人の為になにとぞ、耳打ちして下さい。

１．　平方根　の　手計算

この原稿が終わった後の「敬老の日」、西川ＦＡＸ「微分方程式」をＡＰＬ／Ｊ思考から理解する　（文献０）が到来した。　その中に、全く偶然にも「いまどき √ を開平算術で得る人はいない。　電卓で√一発で　・・・・・」とあった。

その通りの話であろうが、立方根の場合に拡張する話なので、触れて置く。
白状すれば、ある時、インターネットのある Web で見た話である。　（文献１）
平方根の求解の 原理は、次の代数式展開である。

(a + b + c + d + e ....)^2 =
a^2 + b(2a + b) + c(2(a+b) + c) + d(2(a + b + c) + d)
+ e(2(a + b + c +) + e) + ...

これを、手計算で逐次、遂行する事が原理である。
これなら、２以上の累乗根に、その侭、拡張出来よう。

２．　立方根　の　手計算

立方根の場合の展開式は、

(a + b + c + d + e + f + ...)^3 =
a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2) + c(3(a + b)^2 + 3(a+b)c + c^2)
+ d(3(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)d + d^2) +
+ e(3(a + b + c + d)^2 + 3(a + b + c + d)e + e^2)
+ f(3(a + b + c + d + e)^2 + 3(a + b + c + d + e)f + f^2)
+ ....

である。

最も簡単な数字　２　の立方根を求めて見よう。

普通の電卓では、平方根は出来るが立方根はダメが多い。　科学・技術用電卓ならばその為の演算関数が用意されている（有効数字　９桁　出力の例が多い）。
Ｊ言語では　**3 %: 2**　から　**1.25992** で 、有効数字は普通は　６桁である。
最高級電卓 **TI-92 Plus**（**Texas Instruments**社）でも、通常は、これに同じ。

先ず、その普通レベルでの筆算を試みる。　大きい（全角）数字が肝心のものである。

```
                                          １．  ２   ５   ９   ９   ２
                                         ____________________
                                       ）2｜
1^3 = １              ->        1
3 * 10^2      = 300
3 * 10 * ２  =  60           1｜000
   ２ ^ 2    =   4  ->  和*２  ->    728
                                        ________________
                                          272｜000
3 * 120^2   = 43200
3 * 120  * ５ = 1800
    ５ ^ 2  =  25 -> 和*５  ->        225｜125
                                        ____________________________
                                            46｜875｜000
3 * 1250^2   = 4687500
3 * 1250 * ９ =  33750
   ９ ^ 2  =   81 -> 和*９  ->     42｜491｜979
                                          ____________________________
                                              4｜384｜021｜000
3 * 12590^2  =475524300
3 * 12590 * ９=  339930
   ９ ^ 2  =    81 -> 和*９ ->          4｜282｜778｜799
                                            ________________________________
                                                 101｜242｜201｜000
3 * 125990^2 = 47620440300
3 * 125990* ２=    755940
   ２ ^ 2  =      4 -> 和*２ ->              95｜242｜392｜488
```

5｜999｜809｜512

ここ迄で、立方根の６桁 **1.25992** までの筆算が出来た（以下 **1 0 5 ...**）。

原理を示すには充分であろう。

この先の長大演算には、電卓の補助は頼りにならぬので、あくまで、紙と鉛筆で、コチコツやる羽目になる。　また、やれば出来るのだから、筆算の話は終わる。

３．　多　倍　長　演　算

電卓、パソコンは、有効精度　６桁　以上どの程度の能力を持つか？

（１）　**Casio** 社の科学技術電卓　**VOX-3**　級

立方根演算機能あり。

Shift　CUR 2 ->　1.25992105　有効数字　９桁

（２）　**TI^92 Plus**　（ **Texas Instruments**社）

累乗根機能あり、有効桁数最高のモードで

２ ＾（1/3）　-> **1.25992104989**　有効数字　１２桁

（３）　Ｊ言語　　Ｊ５．０２ｂ　の　拡張精度で

x:]a =. 3 %: 2　->　26764999862372 r 21243394468729

この分数表示を、多倍長の小数表示にするには、どうするか？
手元の資料に見えなかった（エレガントな方法を御存知の方は御教示下さい）。

そこで、不器用かも知れないが、以下の如き、引き算の反復法を用いた。
皆様から、お知恵を拝借する為の、叩き台のつもりで書きます。

第１段　　**x:　26764999862372 - 21243394468729*1**　（１ は 根の第１数値）
　　ans =.　5521605393643
第２段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*2**　（２ は 根の第２数値）
　　ans =. 12729264998972
第３段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*5**　（５ は 根の第３数値）
　　ans =. 21075677646075
第４段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*9**　（９ は 根の第４数値）
　　ans =. 19566226242189
第５段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*9**　（９ は 根の第５数値）
　　ans =.　4471712203329
第６段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*2**　（２ は 根の第６数値）
　　ans =.　2230333095832
（ここまで、普通の電卓、パソコン級）

第７段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*1**　（１ は 根の第７数値）
　　ans =.　1059936489591
第８段　　**x:　(ans*10)　- 21243394468729*0**　（０ は 根の第８数値）

ans =. 10599364895910

第９段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*4　（４ は 根の第９数値）

ans =. 21020071084184

第１０段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*9　（９ は 根の第１０数値）

ans =. 19010160623279

第１１段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*8　（８ は 根の第１１数値）

ans =. 20154450482958

第１２段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*8　（９ は 根の第１２数値）

ans =. 10353954611019

（ここまで、ＴＩ社最高電卓級）

第１３段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*4　（４ は 根の第１３数値）

ans =. 18565968235274

第１４段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*8　（８ は 根の第１４数値）

ans =. 15712526602908

第１５段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*7　（７ は 根の第１５数値）

ans =. 8421504747977

第１６段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*3　（３ は 根の第１６数値）

ans =. 20484864073583

第１７段　x:　(ans*10)　- 21243394468729*9　（９ は 根の第１７数値）

ans =. 13658090517269

この辺で止めよう。　結局、　２　の立方根は　有効１７桁では

１．２５９９２１　０４９８９　４８７３９　　である。

【検算】　Ｊ５．０２ｂ　級で　逆算

x: 1.25992 104989 48739 ^ 3 -> 2　整数解に戻る

x: 1.25992 104989 48　^ 3 -> 5733417730579 r 2866708865290 分数解

x: 1.25992 104989 487　^ 3 -> 2　整数解に戻る

この辺が境目である。

尚、Ｃａｓｉｏ社の科学技術用高級電卓の有効数字９桁からの逆算では

x: 1.25992 105 ^ 3 -> 3994922191 r 1997461095 の分数解　であった。

４．　Ｊ の 拡張精度除算表示の決着　（分数から小数へ）

Ｊ言語では、除算の拡張精度は、有理数（分数 ｒ）　表示であるから、時には、小数に計算し直す必要がある。
その論理として、前節 ３．を用いるのが素直である。

● 数値例　15 xdivr (x: 3 %: 2)

```
  numerator & denominator
26764999862372
21243394468729
  cal   start
55216053936430
127292649989720
210756776460750
195662262421890
44717122033290
22303330958320
10599364895910
105993648959100
210200710841840
190101606232790
201544504829580
103539546110190
185659682352740
157125266029080
84215047479770
  significant figures
1 2 5 9 9 2 1 0 4 9 8 9 4 8 7
```

数値計算は幾桁まででも可能であるが、分子の数列の桁数以上を反復しても無意味であろうと思い、今の例では　１４　桁相当までの計算にとどめたかったが、しかし、全節３．の末尾、【検算】の項を見れば、そうとも云えぬ。
１４＋１桁 までの計算が有意らしいので、１５回相当の計算をしてある。

●　プログラム例を示す。

１）　拡張精度除数の分数表示から分子と分母の分離

```
exprec =: 3 : 0
    ac =. ": x: y.            NB. 分数の文字化
    sr =. sc i. 'r'           NB. 記号　r　の位置決定
    se =.  sr  {. ac          NB. 記号 r の前の数字列
    sf =. (-sr) {. ac         NB. 記号 r の後の数字列
  x:  e =: ". se              NB. 前数字列の多倍長数値化（分子）
  x:  f =: ". sf              NB. 後数字列の多倍長数値化（分母）
    '     '
  )
```

２）　拡張精度除数の商の有効数字列を求める

```
xdivr =: 3 : 0
 :
      mj =. x.   NB. 左引数　x.　は希望する有効数字の桁数
wr ' numerator & denominator'
```

```
   exprec y.    NB. 右引数  y. から、分子 e と 分母 f を分離する。
 wr x: x =. e         NB. 分離した分子 e を多倍長で印刷
 wr x: y =. f    NB. 分離した分母 f を多倍長で印刷
 wr ' cal start'
     xj =. 0       NB. 除算の商の数列を格納する変数を定義
      j =. 0       NB. 商の第１段開始


 while. j<mj do.
     i =. 1
 label_1.  x: sxy =. x - y*i
    if. sxy > 0 do. i =. i + 1
                    goto_1.   end.
    xj =. xj, (i - 1)                      NB. 決定したその段の 商 の数値
  wr x: x =. (sxy + y)*10
     j =. j + 1           NB. 商の第 j 段へ
 end.
 wr ' significant figures'
    }. xj       NB. 商の数列の全体
)
```

５． む す び

筆算の能力も、仲々のものである。 要は原理を押さえてあるか否か？ が問題であろう。

こんな初等的な問題から、思わぬ副産物の拡張精度計算法（分数から小数へ）に到達したのは、幸運であった。 最近、物理学界でも「ケプラー以来の惑星の楕円軌道の厳密 **EXACT** 解」が、日本人によって始めて求められたと云う、珍事があった。（文献２）

「今までの惑星が失格する」時世だもの、何でも疑ってみなくちゃ！

物事、安直に判ったような顔は出来ぬ。 科学的真理も「多数決」で評価されるか？

この投稿を郵送する前夜、ある **Web** で同好の話題を見た。 **URL** を示して置くので、「どちらが判り易いか？」比べて眺めて欲しい。（文献３）

旧聞も未だ死なず！　　　温古知新か？

文 献

０） 西川ＦＡＸ（**H18.9.18. pm7.18** 敬老の日）：Ｊの例会用のアイデア **pp.2**
「微分方程式を ＡＰＬ／Ｊ思考から理解する」 方丈記に曰く・・・・

１） **http://www.fnorio.com/0004square_root/**

２） 「観測的２体問題の進展」－ある古典的未解決問題に対する厳密解の発見
浅田秀樹（弘前大学理工学部） 日本物理学会誌 ２００６ **Vol.61 No.**８
pp.581-588 【内容】： 視線に対して軌道傾斜した天体位置の観測量から、ケプラー運動の真の軌道要素を求めるには・・・・・・。
【中野註】浅田氏は若年であるが、日本の「重力波」研究グループ内の重鎮である。 よくも、１７世紀初頭の古典的問題を取り上げたものだ。 敬服！

３）平方根・立方根を筆算で求める方法

http://www004.upp.so~net.ne.jp/s_honma/root.htm