

立方根筆算の記憶から多倍長割算へ

J の 拡張精度除法の仕上げ

中野嘉弘 83才 (札幌市)

FAX 専 011-588-3354 e-mail: yoshihiro@river.ocn.ne.jp

0. は し が き

防災の日の起源である関東大震災の年に私（中野嘉弘）は生まれた。懐かしい母校（北海道の旧制中学）は、尾張・徳川藩が蝦夷地開拓家臣団の子弟の為に、資金を提供して発足したものであった。その開校が私の生年であるので、何かと思い出す事が多い。開校幾周年などの記念日が永遠について回る幸運である。数学教師に軍司義成と云う先生が居られた。1年生の頃、代数学の時間に平方根の求め方を習った。生意気な中学生の私は、即座に、その先の「立方根」の求め方を質問した。今の中学生も、こんな生意気な事を考えるかな？

数日後に、職員室に呼び出されて、軍司先生から「立方根」計算法の手ほどきを受けた。かなり、難しい話であったとの記憶だけが残った。旧制高等学校（北大予科）では、微分法の、いわゆるニュートン法で、立方根の求解を知ってからは、筆算の奥義は忘れて仕舞った。

その後は、有能なる電卓・パソコン・数学ソフトに頼るので、益々、無縁となった。先日、旧制中学の同窓会誌に「思い出話」を依頼されて、久ぶりに考えた。「ハテ、どうやったっけ？」と。

数日間、努力した事を、書留めたので、御披露しよう。余り、目をむく如き話ではあるまいと思うが、読者の皆様におかれましては、名案が御座いますれば、老人の為になにとぞ、耳打ちして下さい。

1. 平方根 の 手計算

この原稿が終わった後の「敬老の日」、西川FAX「微分方程式」をAPL/J思考から理解する（文献0）が到来した。その中に、全く偶然にも「いまどき√を開平方術で得る人はいない。電卓で√一発で・・・」とあった。

その通りの話であろうが、立方根の場合に拡張する話なので、触れて置く。白状すれば、ある時、インターネットのあるWebで見た話である。（文献1）平方根の求解の原理は、次の代数式展開である。

$$\begin{aligned} (a + b + c + d + e + \dots)^2 = & \\ a^2 + b(2a + b) + c(2(a+b) + c) + d(2(a + b + c) + d) & \\ + e(2(a + b + c + d) + e) + \dots & \end{aligned}$$

これを、手計算で逐次、遂行する事が原理である。これなら、2以上の累乗根に、その俣、拡張出来よう。

2. 立方根の手計算

立方根の場合の展開式は、

$$\begin{aligned}
 & (a + b + c + d + e + f + \dots)^3 = \\
 & a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2) + c(3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2) \\
 & + d(3(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)d + d^2) + \\
 & + e(3(a+b+c+d)^2 + 3(a+b+c+d)e + e^2) \\
 & + f(3(a+b+c+d+e)^2 + 3(a+b+c+d+e)f + f^2) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

である。

最も簡単な数字 2 の立方根を求めて見よう。

普通の電卓では、平方根は出来るが立方根はダメが多い。科学・技術用電卓ならばその為の演算関数が用意されている(有効数字 9桁 出力の例が多い)。J言語では 3 %: 2 から 1.25992 で、有効数字は普通は 6桁である。最高級電卓 TI-92 Plus (Texas Instruments社) でも、通常は、これに同じ。

先ず、その普通レベルでの筆算を試みる。大きい(全角)数字が肝心のものである。

$$\begin{array}{r}
 \\
 \hline
) 2 | \\
 1^3 = 1 \quad \rightarrow \quad 1 \\
 3 * 10^2 = 300 \\
 3 * 10 * 2 = 60 \quad \quad \quad 1 | 000 \\
 2^2 = 4 \rightarrow \text{和} * 2 \rightarrow 728 \\
 \hline
 272 | 000 \\
 3 * 120^2 = 43200 \\
 3 * 120 * 5 = 1800 \\
 5^2 = 25 \rightarrow \text{和} * 5 \rightarrow 225 | 125 \\
 \hline
 46 | 875 | 000 \\
 3 * 1250^2 = 4687500 \\
 3 * 1250 * 9 = 33750 \\
 9^2 = 81 \rightarrow \text{和} * 9 \rightarrow 42 | 491 | 979 \\
 \hline
 4 | 384 | 021 | 000 \\
 3 * 12590^2 = 475524300 \\
 3 * 12590 * 9 = 339930 \\
 9^2 = 81 \rightarrow \text{和} * 9 \rightarrow 4 | 282 | 778 | 799 \\
 \hline
 101 | 242 | 201 | 000 \\
 3 * 125990^2 = 47620440300 \\
 3 * 125990 * 2 = 755940 \\
 2^2 = 4 \rightarrow \text{和} * 2 \rightarrow 95 | 242 | 392 | 488
 \end{array}$$

5 | 999 | 809 | 512

ここ迄で、立方根の6桁 1.25992 までの筆算が出来た (以下 105...)。

原理を示すには充分であろう。

この先の長大演算には、電卓の補助は頼りにならぬので、あくまで、紙と鉛筆で、コチコツやる羽目になる。 また、やれば出来るのだから、筆算の話は終わる。

3. 多倍長演算

電卓、パソコンは、有効精度 6桁 以上どの程度の能力を持つか？

(1) Casio 社の科学技術電卓 VOX-3 級

立方根演算機能あり。

Shift CUR 2 -> 1.25992105 有効数字 9桁

(2) TI⁹² Plus (Texas Instruments社)

累乗根機能あり、有効桁数最高のモードで

$2^{1/3}$ -> 1.25992104989 有効数字 12桁

(3) J言語 J 5. 0 2 b の 拡張精度で

x: |a = .3 %: 2 -> 26764999862372 r 21243394468729

この分数表示を、多倍長の小数表示にするには、どうするか？
手元の資料に見えなかった (エレガントな方法を御存知の方は御教示下さい)。

そこで、不器用かも知れないが、以下の如き、引き算の反復法を用いた。
皆様から、お知恵を拝借する為の、叩き台のつもりで書きます。

第1段 x: 26764999862372 - 21243394468729*1 (1 は 根の第1数値)
ans = . 5521605393643

第2段 x: (ans*10) - 21243394468729*2 (2 は 根の第2数値)
ans = . 12729264998972

第3段 x: (ans*10) - 21243394468729*5 (5 は 根の第3数値)
ans = . 21075677646075

第4段 x: (ans*10) - 21243394468729*9 (9 は 根の第4数値)
ans = . 19566226242189

第5段 x: (ans*10) - 21243394468729*9 (9 は 根の第5数値)
ans = . 4471712203329

第6段 x: (ans*10) - 21243394468729*2 (2 は 根の第6数値)
ans = . 2230333095832

(ここまで、普通の電卓、パソコン級)

第7段 x: (ans*10) - 21243394468729*1 (1 は 根の第7数値)
ans = . 1059936489591

第8段 x: (ans*10) - 21243394468729*0 (0 は 根の第8数値)

ans =. 10599364895910
 第 9 段 x: (ans*10) - 21243394468729*4 (4 は 根の第 9 数值)
 ans =. 21020071084184

第 1 0 段 x: (ans*10) - 21243394468729*9 (9 は 根の第 1 0 数值)
 ans =. 19010160623279

第 1 1 段 x: (ans*10) - 21243394468729*8 (8 は 根の第 1 1 数值)
 ans =. 20154450482958

第 1 2 段 x: (ans*10) - 21243394468729*8 (9 は 根の第 1 2 数值)
 ans =. 10353954611019
 (ここまで、T I 社最高電卓級)

第 1 3 段 x: (ans*10) - 21243394468729*4 (4 は 根の第 1 3 数值)
 ans =. 18565968235274

第 1 4 段 x: (ans*10) - 21243394468729*8 (8 は 根の第 1 4 数值)
 ans =. 15712526602908

第 1 5 段 x: (ans*10) - 21243394468729*7 (7 は 根の第 1 5 数值)
 ans =. 8421504747977

第 1 6 段 x: (ans*10) - 21243394468729*3 (3 は 根の第 1 6 数值)
 ans =. 20484864073583

第 1 7 段 x: (ans*10) - 21243394468729*9 (9 は 根の第 1 7 数值)
 ans =. 13658090517269

この辺で止めよう。結局、2 の立方根は有効 1 7 桁では

1. 2 5 9 9 2 1 0 4 9 8 9 4 8 7 3 9 である。

【検算】 J 5. 0 2 b 級で 逆算

x: 1.25992 104989 48739 ^ 3 -> 2 整数解に戻る

x: 1.25992 104989 48 ^ 3 -> 5733417730579 r 2866708865290 分数解

x: 1.25992 104989 487 ^ 3 -> 2 整数解に戻る

この辺が境目である。

尚、C a s i o 社の科学技術用高級電卓の有効数字 9 桁からの逆算では

x: 1.25992 105 ^ 3 -> 3994922191 r 1997461095 の分数解であった。

4. J の 拡張精度除算表示の決着 (分数から小数へ)

J 言語では、除算の拡張精度は、有理数 (分数 r) 表示であるから、時には、小数に計算し直す必要がある。

その論理として、前節 3. を用いるのが素直である。

● 数值例 15 xdivr (x: 3 %: 2)

```

numerator & denominator
26764999862372
21243394468729
cal start
55216053936430
127292649989720
210756776460750
195662262421890
44717122033290
22303330958320
10599364895910
105993648959100
210200710841840
190101606232790
201544504829580
103539546110190
185659682352740
157125266029080
84215047479770
significant figures
1 2 5 9 9 2 1 0 4 9 8 9 4 8 7

```

数値計算は幾桁まででも可能であるが、分子の数列の桁数以上を反復しても無意味であろうと思い、今の例では 14 桁相当までの計算にとどめたかったが、しかし、全節 3. の末尾、【検算】の項を見れば、そうとも云えぬ。14 + 1 桁 までの計算が有意らしいので、15 回相当の計算をしてある。

● プログラム例を示す。

1) 拡張精度除数の分数表示から分子と分母の分離

```

exprec =: 3 : 0
  ac =. " : x : y.      NB. 分数の文字化
  sr =. sc i. 'r'      NB. 記号 r の位置決定
  se =. sr { . ac      NB. 記号 r の前の数字列
  sf =. (-sr) { . ac   NB. 記号 r の後の数字列
x: e =. " . se        NB. 前数字列の多倍長数値化 (分子)
x: f =. " . sf        NB. 後数字列の多倍長数値化 (分母)
  ' ' '
)

```

2) 拡張精度除数の商の有効数字列を求める

```

xdivr =: 3 : 0
:
  mj =. x. NB. 左引数 x. は希望する有効数字の桁数
wr ' numerator & denominator'

```

```

exprec y.    NB. 右引数 y. から、分子 e と 分母 f を分離する。
wr x: x =. e    NB. 分離した分子 e を多倍長で印刷
wr x: y =. f    NB. 分離した分母 f を多倍長で印刷
wr ' cal start'
  xj =. 0    NB. 除算の商の数値を格納する変数を定義
  j =. 0    NB. 商の第 1 段開始

while. j < mj do.
  i =. 1
label_1. x: sxy =. x - y * i
  if. sxy > 0 do. i =. i + 1
    goto_1. end.
  xj =. xj, (i - 1)    NB. 決定したその段の 商 の数値
  wr x: x =. (sxy + y) * 10
  j =. j + 1    NB. 商の第 j 段へ
end.
wr ' significant figures'
}. xj    NB. 商の数値の全体
)

```

5. む す び

筆算の能力も、仲々のものである。 要は原理を押さえてあるか否か？ が問題であらう。

こんな初等的な問題から、思わぬ副産物の拡張精度計算法（分数から小数へ）に到達したのは、幸運であった。 最近、物理学界でも「ケプラー以来の惑星の楕円軌道の厳密 EXACT 解」が、日本人によって始めて求められたと云う、珍事があった。（文献 2）「今までの惑星が失格する」時世だもの、何でも疑ってみなくちゃ！

物事、安直に判ったような顔は出来ぬ。 科学的真理も「多数決」で評価されるか？

この投稿を郵送する前夜、ある Web で同好の話題を見た。 URL を示して置くので、「どちらが判り易いか？」比べて眺めて欲しい。（文献 3）

旧聞も未だ死なず！ 温古知新か？

文 献

- 0) 西川 FAX (H18.9.18. pm7.18 敬老の日) : J の例会用のアイデア pp.2
「微分方程式を A P L / J 思考から理解する」 方丈記に曰く・・・
- 1) http://www.fnorio.com/0004square_root/
- 2) 「観測的 2 体問題の進展」—ある古典的未解決問題に対する厳密解の発見
浅田秀樹 (弘前大学工学部) 日本物理学会誌 2006 Vol.61 No. 8
pp.581-588 【内容】 : 視線に対して軌道傾斜した天体位置の観測量から、ケプラー運動の真の軌道要素を求めるには・・・・・・。
【中野註】浅田氏は若年であるが、日本の「重力波」研究グループ内の重鎮である。 よくも、17世紀初頭の古典的問題を取り上げたものだ。 敬服！
- 3) 平方根・立方根を筆算で求める方法

http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/root.htm