

マルコフ連鎖と推移確率 (J6 版)

Masato SHIMURA
jcd02773@nifty.ne.jp

2006 年 11 月 23 日

1 マルコフ連鎖

マルコフがブーシキンの「スペードの女王」を読んでいて閃いたと伝えられる確率過程の次の状態 (X_{n+1}) がどうなるかは、現在の状態のみに依存し、確率的に決まり、過去の履歴 ($X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$) には無関係であることをマルコフ性と言う。

1.1 例題・電球の取り替え率

[例題] ある工場の 1000 個ある電球
取り替え率。切れた電球は月末にま
とめて取り替える。5 ヶ月で全部が
取り変わる。

経過月数	取り替え率
1	0.05
2	0.20
3	0.60
4	0.15
5	0.02

推移確率

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & q_3 & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & q_4 \\ q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_i + q_i = 1$$

$$p_5 = 1$$

p_1, q_i と取り替え率の関係

$$p_1 = 0.03$$

$$q_1 p_2 = 0.20$$

$$q_1 q_2 p_3 = 0.60$$

$$q_1 q_2 q_3 p_4 = 0.15$$

$$q_1 q_2 q_3 q_4 p_5 = 0.15$$

p_1, q_i と取り替え率の関係から p_1, q_i が求められる。

まったりと書くと左のようになる。汎用にすれば右となる。

DAT=: 0.03 0.2 0.6 0.15 0.02

```
r_markov_sub=: 3 : 0
```

```
P1=: {. y
```

```
Q1=: 1-P1
```

```
P2=: (1{y}%Q1
```

```
Q2=: 1-P2
```

```
P3=: (2{y}%Q1*Q2
```

```
Q3=: 1-P3
```

```
P4=: (3{y}% Q1*Q2*Q3
```

```
Q4=: 1-P4
```

```
P5=: (4{y}% Q1*Q2*Q3*Q4
```

```
Q5=: 1- P5
```

```
(P1,P2,P3,P4,P5);Q1,Q2,Q3,Q4,Q5
```

```
)
```

```
r_markov_sub1=: 3 : 0
```

```
Y0=: y
```

```
NR=: # y
```

```
P=: <{.Y0
```

```
Q=: <1-;P
```

```
COUNTER=: 1
```

```
while. COUNTER < # Y0 do.
```

```
TMPP=: (COUNTER{Y0}% */;Q
```

```
TMPQ=: 1-TMPP
```

```
P=: P,<TMPP
```

```
Q=: Q,<TMPQ
```

```
COUNTER=. >:COUNTER
```

```
end.
```

```
(;P);;Q
```

```
)
```

```
.. r_markov_sub1 DAT
```

```
+-----+
|0.03 0.206186 0.779221 0.882353 1      |
+-----+
```

```
|0.97 0.793814 0.220779 0.117647 _1.9984e_15|
+-----+
```

p_1, q_i をマルコフ連鎖の推移行列に組み込む

```
r_markov=: 3 : 0
'PP QQ'=: r_markov_sub1 y
PP,.({: QQ)* =/~i. #}. QQ),0
)
```

```
    r_markov DAT
    0.03 0.97      0      0      0
0.206186  0 0.793814      0      0
0.779221  0      0 0.220779      0
0.882353  0      0      0 0.117647
      1  0      0      0      0
```

推移行列 P を $P^1, P^2 \dots P^n$ と n 回内積をとると収束していき、定常分布と極限分布が求められる。

```
mp=: +/ . * NB. inner product
```

```
counter_markov=: 4 : 0
M=: r_markov y
TMP=: M mp M
COUNTER=. 0
while. x > COUNTER do.
TMP=: TMP mp M
COUNTER=. >: COUNTER
end.
TMP
)
```

```
20 counter_markov r_markov DAT
```

```
0.341171 0.332149 0.261858 0.0579392 0.00688294  
0.340758 0.330898 0.263721 0.0578088 0.00681431  
0.341923 0.330116 0.262883 0.0582981 0.00677977  
0.342146 0.329958 0.262732 0.0583919 0.0067727  
0.342422 0.329873 0.26243 0.058505 0.00676983
```

1.2 例題・銘柄選択

ビールの銘柄 $S = A, B, C, D$

消費者が今回買うビールは前回の銘柄には影響されるが、それ以前に買った銘柄とは無関係とする。推移確率 P が次で与えられているとすると、

```
DAT1  
A    B    C    D  
A: 0.9 0.05 0.03 0.02  
B: 0.1 0.8 0.05 0.05  
C: 0.08 0.1 0.8 0.02  
D: 0.1 0.1 0.1 0.7
```

消費者の好み (推移確率) が変わらなければ、シェアは次で固定される。

```
10 counter_markov DAT1  
0.522059 0.234295 0.162146 0.0814996  
0.450522 0.276033 0.181494 0.0919506  
0.435937 0.265998 0.211804 0.0862612  
0.447348 0.262823 0.194151 0.0956781
```

```
20 counter_markov DAT1
```

0.486893 0.250775 0.176639 0.0856922
0.478563 0.254909 0.17977 0.0867581
0.476363 0.255344 0.18167 0.0866229
0.477942 0.254723 0.180615 0.0867188

1.2.1 Reference:

伏見正則「確率と確率過程」朝倉書店 2004