

(2006/03/02)

ブートストラップ回帰分析法による寿命の区間推定

帝京平成大学 鈴木義一郎

ブートストラップ回帰分析

目的変数 y と p 個の説明変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ に関して、 n 個の観測値

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

が与えられているとする。そして、 y と \mathbf{x} の間には

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

のような関係式を仮定する。ここで、 f の関数形は既知、 β は未知のパラメータベクトルとする。さらに誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ は、互いに独立で同一の未知の確率分布に従うものとし、 $E\{\varepsilon_i\} = 0$ と仮定する。

①未知のパラメータベクトル β に対して、最小二乗法による推定値 $\hat{\beta}$ を用いて

$$e_i = y_i - f(x_i; \hat{\beta}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

といった残差から経験分布関数 $F_n(x) = F_n(x | e_1, e_2, \dots, e_n)$ を求める。

②経験分布関数 $F_n(x)$ から大き n のブートストラップ標本 $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ から

$$y_i^* = f(x_i; \hat{\beta}) + e_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n$$

という値を算出する。

③ $\sum_{i=1}^n \{y_i^* - f(x_i; \beta)\}^2$ を最小にするような β を $\hat{\beta}^{*(1)}$ とする。

④以上の②と③の手順を N 回繰り返して得られる $\{\hat{\beta}^{*(1)}, \hat{\beta}^{*(2)}, \dots, \hat{\beta}^{*(N)}\}$ から推定値 $\hat{\beta}$ に対する誤差評価を行うことができる。

次に、回帰モデル

$$y = a + \beta x + \varepsilon$$

に対して、ブートストラップ標本に基づくパラメータの推定値を a 、 b とし、残差分散の平方根を $s = \sqrt{e^2}$ とする。 x_0 における y の予測値 $y_0 = a + bx_0$ に対する、信頼度が 95% の信頼

区間は

$$y_0 - 2s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - M(x))^2}{\sum (x_i - M(x))^2}} < y_0 < y_0 + 2s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - M(x))^2}{\sum (x_i - M(x))^2}}$$

のように与えられることが知られている。

【対で観測されたデータ】

RAM	Brand	A									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	10249	13543	8864	10819	8529	7568	9165	9114	10079	9630
	PI=140	7325	10567	8305	8991	7635	7155	7860	7851	8728	8274
75°C	PI=280	4859	4252	3460	2126	1649	2019				
	PI=140	2660	3385	2735	1698	1263	1204				
80°C	PI=280	1946	2616	1700	1705	1643	1744				
	PI=140	1389	1430	1348	1335	1302	699				
85°C	PI=280	586	587	539	952	864	425				
	PI=140	488	566	449	692	734	248				

RAM	Brand	B									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	6329	8578	6782	6547	7565	7047	7893	8030	4085	7406
	PI=140	4173	5713	4531	4609	5855	5648	5262	5242	2712	4382
75°C	PI=280	3776	2745	3380	2307	1942	1799				
	PI=140	2713	1967	2249	1618	1495	1106				
80°C	PI=280	1472	1388	1310	1015	1203	1239				
	PI=140	1216	1055	996	750	876	890				
85°C	PI=280	590	599	529	389	532	505				
	PI=140	543	550	463	290	441	456				

RAM	Brand	C									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	8493	9243	7213	7292	8047	12223	5900	8365	9397	7401
	PI=140	6712	7587	5033	5335	5585	10146	4477	6891	7922	5312
75°C	PI=280	3253	2587	4246	3369	5130	4860				
	PI=140	2633	1966	2399	2346	3814	3736				
80°C	PI=280	1692	1179	4636	2006	1238	1611				
	PI=140	1220	851	3639	1458	1025	1092				
85°C	PI=280	925	600	1249	563	525	625				
	PI=140	671	425	957	432	608	444				

RAM	Brand	D									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	2469	1151	579	2504	3886	5496	2478	8277	660	6496
	PI=140	1860	829	237	1823	2798	3794	2004	6290	429	5109
75°C	PI=280	284	464	563	231	199	280				
	PI=140	203	343	372	123	114	156				

80°C	PI=280	570	431	1101	467	1424	1227				
	PI=140	406	317	708	310	1158	685				
85°C	PI=280	178	146	209	124	104	121				
	PI=140	137	110	136	69	58	67				

RAM	Brand	E									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	6010	11337	10647	8209	14450	2726	2795	2150	3865	3224
	PI=140	3856	9314	6967	5590	8987	2074	2114	1353	2612	2383
75°C	PI=280	6076	3383	5593	2120	1216	1808				
	PI=140	4190	2774	3639	1102	541	1332				
80°C	PI=280	1613	1061	587	1301	746	2209				
	PI=140	911	566	535	502	521	1043				
85°C	PI=280	288	244	876	876	1036	959				
	PI=140	194	99	619	398	582	624				

RW	Brand	A									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	8670	18260	8547	7849	8187					
	PI=140	7181	12203	6470	7067	6361					
75°C	PI=280	1242	763	785	659	826					
	PI=140	1017	566	584	546	642					
80°C	PI=280	487	345	394	320	398					
	PI=140	374	288	320	275	318					
85°C	PI=280	103	101	137	105	116					
	PI=140	78	72	111	88	96					

RW	Brand	B									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	10117	10129	9562	10910	9899					
	PI=140	9940	9975	9215	10827	9371					
75°C	PI=280	4726	4729	4740	4758	4693					
	PI=140	4465	4475	4482	4475	4428					
80°C	PI=280	4603	4440	4421	4484	4625					
	PI=140	4354	3985	3900	4208	4415					
85°C	PI=280	1797	1765	1765	2054	2200					
	PI=140	1626	1586	1577	1921	2150					

RW	Brand	C									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	2980	2081	3908	4209	2034					
	PI=140	2077	1897	2278	3994	1846					
75°C	PI=280	1066	1067	1074	1066	1059					
	PI=140	1022	1024	1031	1022	1015					
80°C	PI=280	543	542	535	541	537					
	PI=140	517	516	508	514	510					
85°C	PI=280	331	345	395	395	394					
	PI=140	295	306	383	385	368					

R	Brand	A									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	2749	2662	2645	2652	3195	2910	2940	2690	2850	2760
	PI=140	2155	2046	2144	2082	2363	2342	2646	2273	2581	2427
75°C	PI=280	659	725	674	1197	627	657				
	PI=140	436	518	435	629	605	619				

80°C	PI=280	321	321	327	324	327	345				
	PI=140	213	206	215	305	307	312				
85°C	PI=280	183	227	241	213	211	221				
	PI=140	159	178	191	187	162	204				

R	Brand	C									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	4730	6066	6970	5250	6046	4220	4010	3850	4270	3920
	PI=140	3693	4328	5166	3936	4650	3585	3499	3664	3534	3534
75°C	PI=280	4273	5235	3540	2320	1745	1820				
	PI=140	3598	4018	3034	1903	1597	1655				
80°C	PI=280	2334	1719	2371	1812	1680	1805				
	PI=140	1986	1523	2048	1799	1683	1137				
85°C	PI=280	1195	1176	940	920	930	950				
	PI=140	1049	1037	819	812	976	832				

R	Brand	D									
	Disc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65°C	PI=280	4296	4160	4510	4112	3945	2740	2750	2730	2710	2750
	PI=140	3615	3411	3706	3271	3026	2626	2634	2565	2449	2632
75°C	PI=280	1958	1977	2322	1840	1740	1670				
	PI=140	1684	1687	2042	1531	1368	1359				
80°C	PI=280	906	879	858	1210	1085	1020				
	PI=140	682	710	660	976	950	933				
85°C	PI=280	474	463	549	630	650	650				
	PI=140	406	394	448	600	611	611				

RAMA65=:9000+1249 4543 _136 1819 _471 _1432 165 114 1079 630
 RAMA65=:RAMA65, :7000+325 3567 1305 1991 635 155 860 851 1728 1274
 RAMA75=:2 6\$1000+3859 3252 2460 1126 649 1019 1660 2385 1735 698 263 204
 RAMA80=:2 6\$1000+946 1616 700 705 643 744 389 430 348 335 302 _301
 RAMA85=:2 6\$400+186 187 139 552 464 25 88 166 49 292 334 _152

 RAMB65=:6000+329 2578 782 547 1565 1047 1893 2030 _1915 1406
 RAMB65=:RAMB65, :4000+173 1713 531 609 1855 1648 1262 1242 _1288 382
 RAMB75=:2 6\$1000+2776 1745 2380 1307 942 799 1713 967 1249 618 495 106
 RAMB80=:2 6\$1000+472 388 310 15 203 239 216 55 _4 _250 _124 _110
 RAMB85=:2 6\$500+90 99 29 _111 32 5 43 50 _37 _210 _59 _44

RAMC65=:7000+1493 2243 213 292 1047 5223 _1100 1365 2397 401
RAMC65=:RAMC65, :5000+1712 2587 33 335 585 5146 _523 1891 2922 312
RAMC75=:2 6\$2000+1253 587 2246 1369 3130 2860 633 _34 399 346 1814 1736
RAMC80=:2 6\$1000+692 179 3636 1006 238 611 220 _149 2639 458 25 92
RAMC85=:2 6\$400+525 200 849 163 125 225 271 25 557 _1 _13 48

RAMD65=:2000+469 _849 _1421 504 1886 3496 478 6277 _1440 4496
RAMD65=:RAMD65, :1000+860 _171 _763 823 1798 2794 1004 5290 _571 4109
RAMD75=:2 6\$200+84 264 363 31 _1 80 3 143 172 _77 _86 _44
RAMD80=:2 6\$300+270 131 801 167 1124 927 106 17 408 10 858 385
RAMD85=:2 6\$100+78 46 109 24 4 21 37 10 36 _31 _42 _33

RAME65=:2000+4010 9337 8647 6209 12450 726 795 150 1865 1224
RAME65=: RAME65, :2000+1856 7314 4967 3590 6987 74 114 _647 612 383
RAME75=:2 6\$1000+5076 2383 4593 1120 216 808 3190 1774 2639 102 _459 1332
RAME80=:2 6\$500+1113 561 87 801 246 1709 411 66 35 2 21 543
RAME85=:2 6\$200+88 44 676 676 836 759 _6 _101 419 198 382 424

RAMA=:RAMA85;RAMA80;RAMA75;RAMA65
RAMB=:RAMB85;RAMB80;RAMB75;RAMB65
RAMC=:RAMC85;RAMC80;RAMC75;RAMC65
RAMD=:RAMD85;RAMD80;RAMD75;RAMD65
RAME=:RAME85;RAME80;RAME75;RAME65

RWA65=:2 5\$8670 18260 8547 7849 8187 7181 12203 6470 7067 6361
RWA75=:2 5\$500+742 263 285 159 326 517 66 84 46 142
RWA80=:2 5\$300+187 45 94 20 98 74 _12 20 _25 18
RWA85=:2 5\$100+3 1 37 5 16 _22 _28 11 _12 _4

RWB65=:2 5\$9000+1117 1129 562 1910 899 940 975 215 1827 371
RWB75=:2 5\$4000+726 729 740 758 693 465 475 482 475 428
RWB80=:2 5\$4000+603 440 421 484 625 354 _15 _100 208 415
RWB85=:2 5\$1000+797 765 765 1054 1200 626 586 577 921 1150

RWC65=:2 5\$2000+980 81 1908 2209 34 77 _103 278 1994 _154
RWC75=:2 5\$1000+66 67 74 66 59 22 24 31 22 15

RWC80=:2 5\$500+43 42 35 41 37 17 16 8 14 10

RWC85=:2 5\$300+31 45 95 95 94 _5 6 83 85 68

RWA=:RWA85;RWA80;RWA75;RWA65

RWB=:RWB85;RWB80;RWB75;RWB65

RWC=:RWC85;RWC80;RWC75;RWC65

RA65=:2000+749 662 645 652 1195 910 940 690 850 760

RA65=:RA65, :2000+155 46 144 82 363 342 646 273 581 427

RA75=:2 6\$659 725 674 1197 627 657 436 518 435 629 605 619

RA80=:2 6\$300+21 21 27 24 27 45 _87 _94 _85 5 7 12

RA85=:2 6\$100+83 127 141 113 111 121 59 78 91 87 62 104

RC65=:3000+1730 3066 3970 2250 3046 1220 1010 850 1270 920

RC65=:RC65, :3000+693 1328 2166 936 1650 585 499 664 534 534

RC75=:2 6\$1000+3273 4235 2540 1320 745 820 2598 3018 2034 903 597 655

RC80=:2 6\$1000+1334 719 1371 812 680 805 986 523 1048 799 683 137

RC85=:2 6\$800+395 376 140 120 130 150 249 237 19 12 176 32

RD65=:2000+2296 2160 2510 2112 2945 740 750 730 710 750

RD65=:RD65, :2000+1615 1411 1706 1271 1026 626 634 565 449 632

RD75=:2 6\$1000+958 977 1322 840 740 670 684 687 1042 531 368 359

RD80=:2 6\$600+306 279 258 610 485 420 82 110 60 376 250 333

RD85=:2 6\$400+74 63 149 230 250 250 6 _6 48 200 211 211

RA=:RA85;RA80;RA75;RA65

RC=:RC85;RC80;RC75;RC65

RD=:RD85;RD80;RD75;RD65

```
pair =:4 :0
x=. 1,.,%273.15+85 80 75 65+#r=.,.'
while. x.>#r
do. y=. ^.>(([:?#@|:){"1])L:0 y.
d=. -(1,%273.15+50)+/ .*b=. y%. x
r=. r, (d>0)#(^ (1,%273.15+25)+/ .*b)%8766
end.
```


m, :%:(+/*:r-”1 m=. (+/r)%n)% (n-1)*n=. #r
)

10000 pair RAMA	10000 pair RWA
569.341 493.462	86539.1 46210.6
7.11096 6.87257	1347.82 600.464
10000 pair RAMB	10000 pair RWB
966.741 381.017	13.1899 13.412
6.00892 3.24189	0.188015 0.193626
10000 pair RAMC	10000 pair RWC
503.387 499.268	66.1949 33.2431
5.29263 6.16569	0.609436 0.428165
10000 pair RAMD	10000 pair RA
896.928 1008.64	171.397 129.155
20.6987 27.2495	0.740358 0.600957
10000 pair RAME	10000 pair RC
1193.86 1217.32	29.8001 16.2325
43.4577 52.284	0.258726 0.113648
10000 pair RAME	10000 pair RD
1295.57 1327.79	44.8706 29.0441
48.7229 58.6139	0.436481 0.271725
左上の数値がPI=280に於ける常温(25℃)のときの推定寿命(年)	
右上の数値がPI=140に於ける常温(25℃)のときの推定寿命(年)	
下段の数値は標準誤差(この値の2倍を平均値にプラス・マイナスして信頼区間を得る)	

以上の計算結果からの結論としては

- i) RAMA, RAMB;RWA, RWC;RA, RC, RD には、歴然とした差が認められる。
- ii) RAMD には、ハッキリと“逆転”してるとはいえないが、予想と異なる結果である。
- iii) RAMC, RAME;RWB には、有意差は認められなかった。

さらに、シミュレーションの回数を100000回としたときの結果は以下のようになる。

100000 pair RAMA	100000 pair RWA
------------------	-----------------

560.355 489.902	87534 46601.2
2.24265 2.21454	428.681 190.557
100000 pair RAMB	100000 pair RWB
962.178 376.659	12.8884 13.098
1.86919 1.00564	0.0590376 0.0607585
100000 pair RAMC	100000 pair RWC
507.418 503.574	66.3096 33.7994
1.69479 1.97209	0.192073 0.137143
100000 pair RAMD	100000 pair RA
898.832 1014.82	172.207 129.882
6.50914 8.53527	0.231406 0.188977
100000 pair RAME	100000 pair RC
1267.72 1279.43	29.5704 16.1974
15.3089 17.9105	0.0805173 0.0356023
	100000 pair RD
	44.3431 28.6961
	0.137248 0.0850451