(ＪＡＰＬＡ 2010/12/4)

『連勝の確率』について

統計数理研究所（名誉教授）　鈴木義一郎

§１　成功連の長さの確率

戦績の系列で、１の表れる確率をｐ（０の表れる確率をｑ＝１－ｐ）とするとき、全ての系列のなかで、１という文字がｒまでしか継続しないような系列の集合を$S(r,n)$と表す。さらに$S(r,n)$のなかで、１が丁度ｈ回、０が（ｎ－ｈ）回表れる系列の集合を$T(h;r,n)$、その個数を$C(h;r,n)$とする。

「$S(r,n)$という系列を得る確率」$Q(p;r,n)$は

$$Q(p;r,n)=\sum_{h=0}^{n} C(h;r,n)p^h q^{n-h}$$

のように与えられる。したがって、１－$Q(p;r,n)$が(r+1)以上の連勝の表れる確率を与えることになる。

さて係数の間には、次のような"漸化関係"が成り立つ。

$$C(h;r,n)=\sum_{i=9}^{r} C(h-1;r,n-i-1)$$

$$C(0;r,n)=1\ ,\ C(1;r,n)=r\ ,\ \ C(h;r,n)={}_nC_h(0\le h,<r)$$

```
first=:3 :'(>:{.y){."1(i.@>:!])"0 i.>:{:y'
second=:#@|:({.;}.)[:}."1],.0:
change=:(>@{.,}:@{.@>@{:,new@>@{.);}.@>@{:
slide=:3 :'>{.change^:(-/$y)second y'
line=:4 :'{."1(slide^:x)first y'
coef=:[:|:i.@>:@{:line"0 1] NB. C(h;r,n)
prob=:4 :'(x^h)*(1-x)^|.h=.i.>:y'
probr=:4 :'+/"1(coef y)*x prob"0 i.>:{:y'
probrl=:[:{:prob [
```

上記の漸化関係を利用して、{$C(h;r,n)$}を算出するための関数を左記のように定義する。

最後の関数「probrl」は$S(r,n)$という系列を得る確率$Q(p;r,n)$を出力する関数

<table>
<tr><th>]C=:first 2 6</th><th>]D=:second C</th><th>change D</th><th>change^:2 D</th></tr>
<tr>
<td>1 0 0
1 2 1
1 3 3
1 4 6
1 5 10
1 6 15</td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0</td><td>3 3 0
4 6 0
5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0
3 3 0</td><td>4 6 0
5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>0 0 0
1 0 0
2 1 0
3 3 0
4 6 2</td><td>5 10 0
6 15 0</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

slide C	0 line 2 6	4 line 2 6	|:(i.7)line"0 1(2 6)
0 0 0 1 0 0 2 1 0 3 3 0 4 6 2 5 10 7 6 15 16	1 1 1 1 1 1 1 1 line 2 6 0 1 2 3 4 5 6 2 line 2 6 0 0 1 3 6 10 15 3 line 2 6 0 0 0 0 2 7 16	0 0 0 0 0 1 6 5 line 2 6 0 0 0 0 0 0 0 6 line 2 6 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 0 0 0 0 1 4 6 2 0 0 0 1 5 10 7 1 0 0 1 6 15 16 6 0 0

:coef 2 6	coef 3 6	coef 4 6
1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 0 0 0 0 1 4 6 2 0 0 0 1 5 10 7 1 0 0 1 6 15 16 6 0 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 1 0 0 0 1 4 6 4 0 0 0 1 5 10 10 3 0 0 1 6 15 20 12 2 0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 2 1 0 0 0 0 1 3 3 1 0 0 0 1 4 6 4 1 0 0 1 5 10 10 5 0 0 1 6 15 20 15 4 0

]C3=:coef 2 3	]P3=:0.5 prob"0 i.>:3	]CP3=:C3*P3	+/"1 CP3
1 0 0 0 1 1 0 0 1 2 1 0 1 3 3 0	1 0 0 0 0.5 0.5 0 0 0.25 0.25 0.25 0 0.125 0.125 0.125 0.125	1 0 0 0 0.5 0.5 0 0 0.25 0.5 0.25 0 0.125 0.375 0.375 0	1 1 1 0.875 0.5 probr 2 3 1 1 1 0.875

probrl=:[:{:probr	$S(r,n)$ という系列を得る確率 $Q(p;r,n)$ を出力する関数		
0.5 probrl 4 50 0.448125	0.5 probrl 6 50 0.834667	0.5 probrl 8 50 0.95854	0.5 probrl 10 50 0.990016
0.6 probrl 4 50 0.164964	0.6 probrl 6 50 0.574411	0.6 probrl 8 50 0.833851	0.6 probrl 10 50 0.940716

下表に、成功連（１の連）の長さが３以内の場合で、成功の確率をｐ=0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 とした場合の確率を示してみた。これらの値を１から引いた確率ｐの１人が４連勝以上する確率を与える。ｐの値が大きくなるほど、また勝負回数ｎが多くなるほど連勝の確率が大きくなる様子が読みとれる。

確率の値が異る場合の３連勝以内の確率(%表示)

n	p=0.5	p=0.6	p=0.7	p=0.8	p=0.9
10	75.4883	57.5484	36.7497	17.2700	4.0638
11	72.7539	53.5738	32.3138	13.7756	2.6684
12	70.1172	49.8678	28.3968	10.9523	1.7035
13	67.5781	46.4306	24.9985	8.8001	1.1690
14	65.1306	43.2273	21.9946	7.0441	0.7826
15	62.7716	40.2440	19.3475	5.6294	0.5160
16	60.4980	37.4668	17.0199	4.5009	0.3409
17	58.3069	34.8816	14.9745	3.6036	0.2291
18	56.1951	32.4746	13.1738	2.8827	0.1524
19	54.1597	30.2337	11.5896	2.3057	0.1011
20	52.1981	28.1475	10.1960	1.8445	0.0672

r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 20' 0.6875 0.226292	r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 150' 0.027285 93.6612	勝負回数ｎが増えても原理的には計算が可能であるが、計算時間が膨大になる。
r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 50' 0.249587 2.96026	r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 200' 0.00431361 240.842	
r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 100' 0.0394584 26.2172	r,6!:2'r=.0.5 probrl 3 300' 0.172586 1038.16（17 分強）	そこで、近似式を考えてやる方が合理的になる。

§２　成功連の長さの確率に対する近似式

§１で示した方法は、ｎが大きくなっても原理的には計算可能であるが、ｎが２００程度になると計算時間が１７分以上もかかるので、実際的とはいえなくなる。そこで、近似式による求める方法を考えてみよう。

ｎ回の勝負で丁度ｒの成功連が生じているという事象の確率をu_rとすると、

$$u_n = 0\ (0 \le n < r) \quad , \quad u_r = p^r \quad , \quad u_{r+1} = (1-p)p^r$$

であるから

$$u_{r+1} + u_r p = p^r$$

という関係が成り立つ。
さらに一般に、$n \geq r$ に対しても

$$u_n + u_{n-1}p + u_{n-2}p^2 + \cdots\cdots\cdots + u_{n-r+1}p^{r-1} = p^r$$

という関係の成り立つことも分かる。両辺に s^n を掛けて $n = r, r+1, \cdots\cdots\cdots\cdots$ について加えると、左辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n + ps\sum_{n=r}^{\infty} u_{n-1}s^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + p^{r-1}s^{r-1}\sum_{n=r}^{\infty} u_{n-r+1}s^{n-r+1} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n + ps\sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n + \cdots\cdots\cdots\cdots + p^{r-1}s^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n \\
&\quad = \{U(s) - 1\}\{1 + ps + p^2 s^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + p^{r-1}s^{r-1}\} \\
&\quad = \{U(s) - 1\}\frac{1 - p^r s^r}{1 - ps}
\end{aligned}$$

のように表される。ここで

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \ (u_0 = 1)$$

である。また右辺も

$$p^r \sum_{n=r}^{\infty} s^n = \frac{p^r s^r}{1 - s}$$

のように表されるから

(+) $$U(s) = \frac{1 - s + (1 - p)p^r s^{r+1}}{(1 - s)(1 - p^r s^r)}$$

次に、長さｒの成功連が、ｎ回目で初めて生じているという事象の確率を v_r とすると、

明らかに

(∗) $$v_n = 0\ (0 \leq n < r) \quad , \quad v_r = p^r \quad , \quad v_{r+1} = (1 - p)p^r$$

である。さらに

$$u_n = \sum_{h=1}^{n} v_h u_{n-h}$$

という関係も成り立つ。そこで

$$V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n$$

という関数を定義すると、(∗)の関係より

$$\sum_{n=1}^{M} u_n s^n = \sum_{n=1}^{M} s^n \sum_{h=1}^{n} v_h u_{n-h} = \sum_{h=1}^{M} v_h s^h \sum_{n=h}^{M} u_{n-h} s^{n-h} = \sum_{h=1}^{M} v_h s^h \sum_{m=0}^{M-h} u_m s^m$$

$M \to \infty$ とすると

$$U(s) - 1 = V(s)U(s)$$

ところで(+)の関係があったから

$$V(s) = 1 - \frac{1}{U(s)} = \frac{\left(1 - s + (1-p)p^r s^{r+1}\right) - (1-s)\left(1 - p^r s^r\right)}{1 - s + (1-p)p^r s^{r+1}} = \frac{p^r s^r (1-ps)}{1 - s + (1-p)p^r s^{r+1}}$$

$$= \frac{p^r s^r}{\left(1 - s + (1-p)p^r s^{r+1}\right)/(1-ps)} = \frac{p^r s^r}{(1-p)s\left\{1 + 2ps + \cdots\cdots\cdots + p^{r-1}s^{r-1}\right\}} \equiv \frac{A(S)}{B(S)}$$

のように表される。さらに分母の関数 $B(s)$ はｓに関するｒ次の多項式で、しかも

$$C(s) = (1-p)\left\{1 + ps + \cdots\cdots\cdots + rp^{r-1}s^{r-1}\right\}$$

という関数が $s \geq 0$ で０から ∞ まで単調に増加し

$$C(1) = (1-p)\left\{1 + p + \cdots\cdots\cdots + rp^{r-1}\right\} = \left(1 - p^r\right) < 1$$

であるから、$B(s)$ は唯１個の正の実根 $s_0 (> 1)$ を持つことが分かる。さらに微分も

$$B^{(1)}(s) = -(1-p)\left\{1 + 2ps + \cdots\cdots\cdots rp^{r-1}s^{r-1}\right\}$$

のように与えられるから

$$\rho = \frac{-A(s_0)}{B^{(1)}(s_0)} = \frac{p^r {s_0}^r}{(1-p)\left\{1 + 2ps + \cdots\cdots\cdots + rp^{r-1}s^{r-1}\right\}}$$

のように算出できる。代数学の基本定理により $U(s) = A(s)/B(s)$ の s^n の係数 u_n に対して

$$u_n = \frac{\rho}{{s_0}^{n+1}} = \frac{p^r {s_0}^r}{(1-p)\left\{1 + 2ps_0 + \cdots\cdots\cdots + rp^{r-1}{s_0}^{r\wedge 1}\right\}} \bullet \frac{1}{{s_0}^{n+1}}$$

といった近似関係の成り立つことが示される。従って

$$f_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots\cdots\cdots = \frac{p^r {s_0}^r / (1 - s_0)}{(1-p)\left\{1 + 2ps_0 + \cdots\cdots\cdots + rp^{r-1}{s_0}^{r\wedge 1}\right\}} \bullet \frac{1}{{s_0}^{n+1}}$$

この f_n はｎまでに長さｒの成功連が生じていないという事象の確率を表わすから、先の議論のｒを（ｒ＋１）に変えて、１という文字がｒまでしか継続しないような集合 $S(r,n)$ の系

列を得る確率$Q(p;r,n)$に対する近似式は

$$q_n = \frac{p^{r+1}x^{r+1}/(1-x)}{(1-p)\{1+2px+\cdots\cdots\cdots+rp^r x^r\}} \bullet \frac{1}{x^{n+1}}$$

で与えられる。ここでｘは、（ｒ＋１）次の方程式

$$1-(1-p)x\{1+px+\cdots\cdots\cdots+rp^r x^r\}=0$$

の唯一の実根である。

<table>
<tr><td rowspan="3">prob_ap=:4 :0

q=.1,(x-1)*x^i.r=.>:{.y
s=.([-q&p.%q&p.D.1)^:50(1)
(1-x*s)%((1-x)*1+r-
r*s)*s^>:{:y
)</td><td colspan="2">]q=:0.6(pol=:4 :'1,(x-1)*x^i.>:y')3

1 _0.4 _0.24 _0.144 _0.0864</td></tr>
<tr><td colspan="2">root=:4:'([-q&p.%(q=.x pol y)&p.D.1)^:50(1)'</td></tr>
<tr><td>]s=:0.8 root 3

1.25</td><td>q&p. s

1.11022e_16</td></tr>
<tr><td colspan="3">「prob_ap」が$S(r,n)$という系列を得る確率$Q(p;r,n)$を出力する関数である。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">近似式による確率の値は正確な確率とほとんど遜色なし！</td></tr>
<tr><td>0.5 probrl 4 50

0.448125</td><td>0.5 probrl 6 50

0.834667</td><td>0.5 probrl 8 50

0.95854</td><td>0.5 probrl 10 50

0.990016</td></tr>
<tr><td>0.6 probrl 4 50

0.164964</td><td>0.6 probrl 6 50

0.574411</td><td>0.6 probrl 8 50

0.833851</td><td>0.6 probrl 10 50

0.940716</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0.5 prob_ap 4 50

0.448125</td><td>0.5 prob_ap 6 50

0.834667</td><td>0.5 prob_ap 8 50

0.95854</td><td>0.5 prob_ap 10 50

0.990016</td></tr>
<tr><td>0.6 prob_ap 4 50

0.164964</td><td>0.6 prob_ap 6 50

0.574411</td><td>0.6 prob_ap 8 50

0.833851</td><td>0.6 prob_ap 10 50

0.940716</td></tr>
</table>

```
   1-(0.9+0.01*i.6)prob_ap"0 1(69 900)
0.0514843 0.0984685 0.181174 0.315425 0.506851 0.727632
```

```
  a=. (0.9+0.01*i.6)
```

a,. 1- (0.9+0.01*i.6) prob_ap ("0 1) 69 900

0.9 0.0514843

0.91 0.0984685

0.92 0.181174

0.93 0.315425

0.94 0.506851

0.95 0.727632

900(＝90×10)戦の内で 70 連勝以上できるには、勝率 p が 0.93 以上が必要である！