

J の OpenGL グラフィックスーその 4 ー正 12 面体と正 20 面体の頂点座標の計算ー

西川 利男

J の OpenGL グラフィックスとして、先に立方体(サイコロ)、正 8 面体、正 12 面体までの正多面体を回転させるプログラムを作った[1], [2], [3]。これに続いて正 20 面体も簡単にと考えたがすぐには出来なかった。問題は OpenGL というより、正 20 面体の頂点座標を求めることが、思ったよりやっかいだったためである。

今回、前とは違った方法で正 12 面体の頂点座標を計算する方法がわかり、その延長として正 20 面体の頂点座標も得ることが出来た。なお、その結果、完成した OpenGL グラフィックス・プログラムは別項で述べる。

1. 正多面体の基本の図形量の計算

正多面体の頂点座標を得るためには、準備としていくつかの正多面体の基本図形量を求めておく必要がある[3], [4]。

いろいろな正多面体はシェフリのパラメータ $\{p, q\}$ で統一的に表される。ここで p は正多面体を構成する正多角形の辺の数、 q は頂点に集まる辺の数である。

$\{3, 3\}$ 正 4 面体

$\{4, 3\}$ 立方体 (正 6 面体)

$\{3, 4\}$ 正 8 面体

$\{5, 3\}$ 正 12 面体

$\{3, 5\}$ 正 20 面体

正多面体の一辺の長さを 2^a とするとき、
外接球の半径 R は

$$R = \frac{a}{k} \sin \frac{\pi}{q}$$

内接球の半径 r は

$$r = \frac{a}{k} \cos \frac{\pi}{q} \cot \frac{\pi}{p}$$

ここで

$$k^2 = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q}$$

-
- [1] 西川利男「J の g13-OpenGL グラフィックスーその 1」JAPLA 研究会資料 2009/9/26
[2] 西川利男「J の g13-OpenGL グラフィックスーその 2、正 8 面体と正 12 面体を動かす」
JAPLA 研究会資料 2009/9/26
[3] 西川利男「J の OpenGL グラフィックスーその 3, J602 版 OpenGL/サイコロを回転する」
JAPLA 研究会資料 2009/10/24
[4] コクセター、銀林浩訳「幾何学入門」p. 163-165 明治図書(1665).
[5] 一松信「正多面体を解く」p. 22 東海大学出版会(1997).

正多面体の外接球の半径Rおよび内接球の半径rの導出

(コクセターの書に計算式の導出があるが必ずしも分かり易くはないので、筆者なりに平易に説明する。)

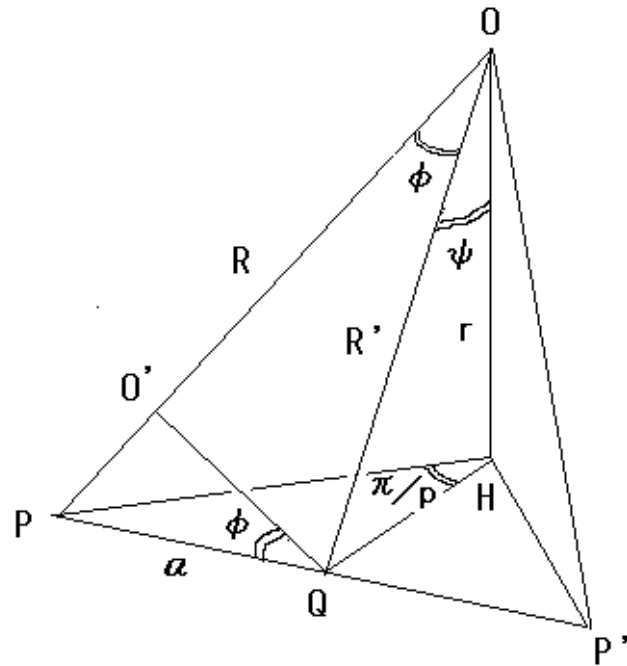
正多面体 {p, q} の一辺の長さを $2a$ とするとき、

正多面体の中心(O)、頂点(P)、正多面体を構成する正多角形の中心(H)なる3点を通る面

正多面体の中心(O)、辺の中点(Q)、正多面体を構成する正多角形の中心(H)なる3点を通る面

正多面体を構成する正多角形の面そのもの

以上の3つの面で区切られる小立体、図に示す直角3角形錘体OPQHを考える。



次の2つの角を定めると、

$$\phi = \angle POQ$$

$$\psi = \angle QOH$$

正多面体の外接球(R)、中接球(R')、内接球(r)の半径は次のようになる。

$$R = a \operatorname{cosec} \phi$$

$$R' = a \cot \phi$$

$$r^2 = R'^2 - \left(a \cot \frac{\pi}{p} \right)^2$$

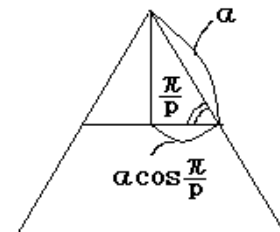
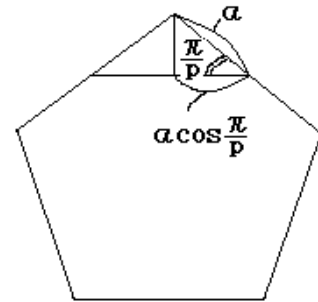
$$\cos \psi = r/R'$$

ところで、これら2つの角 ϕ と ψ とを求めるには、正多面体の1つの頂点に集まるq本の辺の中点どうしを結ぶ小さな図形を利用する。以下具体的にやってみよう。

正12面体 {p=5, q=3} の場合は、正5角形の辺の中点を結ぶ線分の長さは右の図より、 $2a \cos \frac{\pi}{5}$ となる。そしてこの操作により出来る図形は正3角形になる。かつ上の値はこの正3角形の一辺の長さに等しい。

一方、正20面体 {p=3, q=5} の場合、正3角形の辺の中点を結ぶ図形は一辺の長さ $2a \cos \frac{\pi}{3}$ の正5角形になる。

一般にはこの小正多角形の一辺の長さは $2a \cos \frac{\pi}{p}$ と表される。



次に、これら正3角形あるいは正5角形に外接する円の半径を2通りの式で表すことを行なう。

まず、ひとつの方法は右の図からただちに

$$a \cos \frac{\pi}{p} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{q}$$

ここで、正12面体のときは{p=5, q=3}、正20面体のときは{p=3, q=5}である。

一方、もうひとつの方法として、はじめの図に示すように、正多面体の辺の中点Qから直線OPへの垂線QQ'からも、次のように

$$a \cos \phi$$

して求められる。

したがって、これら上の2つの式を等しいと置くと

$$\cos \phi = \cos \frac{\pi}{p} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p} / \sin \frac{\pi}{q}$$

なる関係式が得られる。

これを使って、先の式から外接球の半径Rを計算してみる。

$$R = a / \sin \phi = a / \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = a / \sqrt{1 - (\cos \frac{\pi}{p} / \sin \frac{\pi}{q})^2}$$

ここで

$$k^2 = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q}$$

とおくと

$$R = \frac{a}{k} \sin \frac{\pi}{q}$$

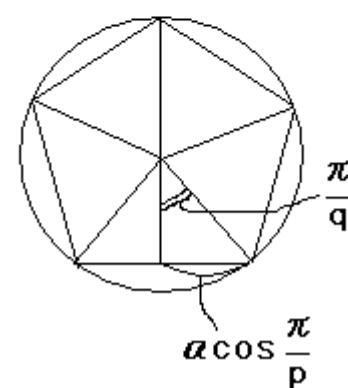
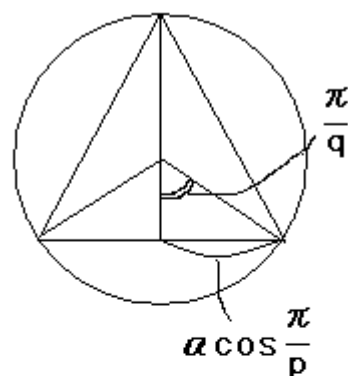
同様にして、内接球の半径rはつぎのように計算される。

$$r = \frac{a}{k} \cos \frac{\pi}{q} \cot \frac{\pi}{p}$$

また角 ψ については、次のようになり、

$$\cos \psi = \cos \frac{\pi}{q} / \sin \frac{\pi}{p}$$

これから、正多面体の二面角(dihedral angle)は $\pi - 2\psi$ として計算される。



2. 正12面体 {p=5, q=3} の頂点座標の計算式

ここでは正12面体の中心に座標の原点をおき、X方向を右、Y方向を奥ゆき、Z方向を上とする右手系の座標系で行なう。そしてこれを机の上と考え、正12面体を正五角形の面が机の面に接するようにして、倒れないような位置に置く。

すると、正12面体の上面の正五角形の面は、机に平行になり、そのZ座標の値は先の正12面体の内接球の半径 r になることに注意せよ。

5つの頂点 D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 の座標値は直ちに次のように得られる。最初の点 D_0 を X 軸方向に合わせると、点 D_1 から D_4 は点 D_0 を Z 軸のまわりに 72° ずつ回転したものとして得られる。

$$\theta = 2\pi/5 = 72^\circ$$

$$b = a \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{a}{k} \cos \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{5}$$

とすると

$$D_0: (b, 0, r)$$

$$D_1: (b \cos \theta, b \sin \theta, r)$$

$$D_2: (b \cos 2\theta, b \sin 2\theta, r)$$

$$D_3: (b \cos 3\theta, b \sin 3\theta, r)$$

$$D_4: (b \cos 4\theta, b \sin 4\theta, r)$$

次にその下の層の頂点 D_5 から D_9 を計算する。ここで先の頂点 D_0 は X-Z 平面上の点であり、この点 D_0 をいまの平面上で正12面体の中心を回転の中心として、角 2α だけ回転する。この点を D_5 とする。ここで角 α は次の式で求められる。

$$\sin \alpha = \frac{a}{R}$$

これを用いて頂点 D_5 は次のようになる。

$$D_5: (D_0X \cos 2\alpha + D_0Z \sin 2\alpha, 0, -D_0X \sin 2\alpha + D_0Z \cos 2\alpha)$$

で求められる。

なお、 D_0X, D_0Y, D_0Z などはそれぞれ点 D_0 の X 座標、Y 座標、Z 座標を示す。以下同様。

一度、 D_5 が求められれば、この層の頂点 D_6, D_7, D_8, D_9 は上と同様に D_5 を Z 軸のまわりに 72° ずつ回転したものとして得られる。

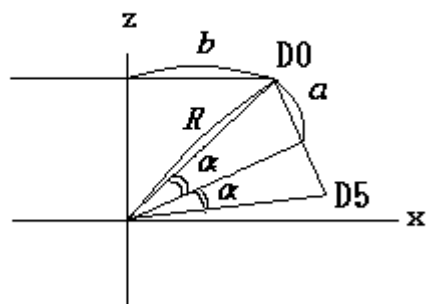
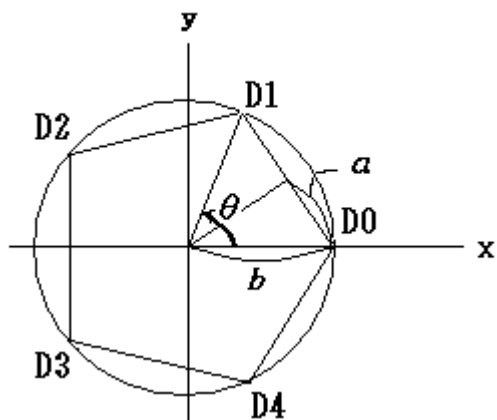
$$D_6: (D_5X \cos \theta, D_5Y \sin \theta, D_5Z)$$

$$D_7: (D_5X \cos 2\theta, D_5Y \sin 2\theta, D_5Z)$$

$$D_8: (D_5X \cos 3\theta, D_5Y \sin 3\theta, D_5Z)$$

$$D_9: (D_5X \cos 4\theta, D_5Y \sin 4\theta, D_5Z)$$

このようにして、頂点 D_1 から D_{10} の座標値は得られた。



後半は、頂点 D0 から D9 の正 12 面体の中心に関する対蹠点、つまり順序と符号を逆にする
ことによって、頂点 D10 から D19 の座標値は求められる。

3. 正 20 面体 {p=3, q=5} の頂点座標の計算式

正 20 面体の場合も、前と同様、正多面体の中心に座標の原点をおき、X 方向を右、Y 方向を奥ゆき、Z 方向を上とする右手系の座標軸で行なう。ただ今回はこのような机の上に正 20 面体の頂点の一点で立てた、つまり正 20 面体の外接球の直径が机に垂直な Z 軸に一致するように置く。

一辺 $2a$ の正 20 面体の外接球の半径 R は

$$R = \frac{a}{k} \sin \frac{\pi}{q} \quad \text{ただし} \quad k^2 = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q}$$

同じ R を用いたが、当然正 12 面体の場合とは値は違う。

まず、正 20 面体の最初の頂点 C_0 は次のようになる。

$$C_0: (0, 0, R)$$

次の頂点 C_1 を求めるには、正 12 面体の場合と同様の考え方を利用する。すなわち、頂点 C_1 も頂点 C_0 と同じ X-Z 平面上になるようにする。つまり、頂点 C_0 を X-Z 面上で原点を中心に角度 2β だけ回転して頂点 C_1 とする。ここで

$$\sin \beta = \frac{a}{R}$$

である。

すると、頂点 C_1 は次のようになる。

$$C_1: (C_0X \cos 2\beta + C_0Z \sin 2\beta, C_0Y, -C_0X \sin 2\beta + C_0Z \cos 2\beta)$$

次に頂点 C_2, C_3, C_4, C_5 についても、先の正 12 面体の場合と同様、頂点 C_1 を机に平行な平面 $X'-Y'$ 面上で、Z 軸の周りに 72° ずつ回転したものとして得られる。

$$C_2: (C_1X \cos \theta, C_1X \sin \theta, C_1Z)$$

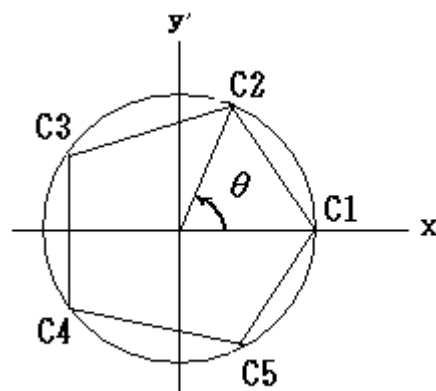
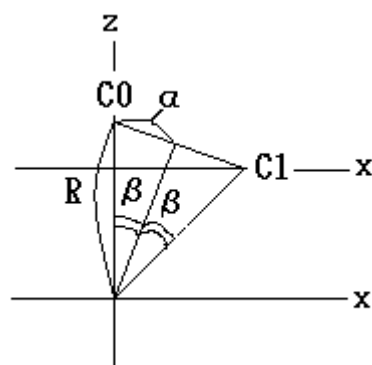
$$C_3: (C_1X \cos 2\theta, C_1X \sin 2\theta, C_1Z)$$

$$C_4: (C_1X \cos 3\theta, C_1X \sin 3\theta, C_1Z)$$

$$C_5: (C_1X \cos 4\theta, C_1X \sin 4\theta, C_1Z)$$

後半の頂点 $C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}$ はいま得られた頂点 C_0 から C_5 の正 20 面体の中心に関する対蹠点として得られることも同様である。

なお、正 12 面体、正 20 面体の頂点座標の順序に関していずれの場合も、OpenGL で正多角形の頂点の連結を行なうため、順序付けの調整が必要である。そのための処理が最後に加えられている。



4. Jによる頂点座標計算のプログラム

上の計算式にもとづいたJのプログラムは次のようになる。

```
NB. polyhedron. ijs
NB. 正12面体と正20面体の頂点座標を求める
NB. 2009/11/2
NB. 2009/11/9  一辺=2a  に変更する

load 'trig'

polyh =: 3 : 0
:
a =. x. % 2          NB. 正多面体を構成する正多角形の一辺
'p q' =. y.         NB. シェフリのパラメータ
K =. %: 1 - ( (cos 1p1%p)^2) + (cos 1p1%q)^2 )
NB. R = 正多面体の外接球の半径
R =. a * (sin 1p1 % q) % K
l =. a * (cos 1p1 % p) % K
NB. r = 正多面体の内接球の半径
r =. a * (% tan 1p1 % p) * (cos 1p1 % q) % K
NB. r5 = 正5角形の外接円の半径
r5 =. (a) % sin 1p1 % 5
h5 =. %: (R^2) - (r5^2)
NB. h5=r: 正5角形の板の高さ=正5角形と重心との距離=正多面体の内接球の半径
R, r, r5
)

NB. 正12面体の頂点座標
dodec =: 3 : 0
a =. y.
'R r r5' =. a polyh 5 3
'p q' =. 5, 3
NB. R=正12面体の外接球の半径
NB. r=正12面体の内接球の半径=正5角形の板と重心との距離
NB. r5=正5角形の外接円の半径
TH =. (2p1 % p) * i.5
DA =. (r5 * (cos TH),. (sin TH)), "(1 0) r
'D0 D1 D2 D3 D4' =. DA
D0 =. 0{DA
'D0X D0Y D0Z' =. D0
sin_alph =. (a%2) % R
cos_alph =. %: 1 - sin_alph^2
sin_2alph =. 2 * sin_alph * cos_alph
cos_2alph =. (cos_alph^2) - (sin_alph^2)
D5X =. (D0X*cos_2alph) + (D0Z*sin_2alph)
D5Z =. (-D0X*sin_2alph) + (D0Z*cos_2alph)
```

```

D5Y =. D0Y
D5 =. D5X, D5Y, D5Z
DBX =. (D5X * cos TH) - (D5Y * sin TH)
DBY =. (D5X * sin TH) + (D5Y * cos TH)
DB =. (DBX, .DBY), "(1) D5Z
'D5 D6 D7 D8 D9' =. DB
NB. 対蹠点を求めた後、順序を調整する 09/11/11
DC0 =. -|. DB
DC1 =. 1 _1 1*(1 1) DC0
DC =. 1 |. DC1
'D10 D11 D12 D13 D14' =. DC
DDX =. -|. DA
DDY =. 1 _1 1*(1 1) DDX
DD =. 1 |. DDY
'D15 D16 D17 D18 D19' =. DD
DA, DB, DC, DD
)

```

NB. 正 20 面体の頂点座標

```

icosa =: 3 : 0
a =. y.
'R r r5' =. a polyh 3 5
'p q' =. 3, 5
NB. R=正 20 面体の外接球の半径
C0 =. 0, 0, R
'COX COY COZ' =. C0
sin_beta =. (a%2) % R
cos_beta =. %: 1 - sin_beta^2
sin_2beta =. 2 * sin_beta * cos_beta
cos_2beta =. (cos_beta^2) - (sin_beta^2)
C1X =. (COX*cos_2beta) + (COZ*sin_2beta)
C1Z =. (-COX*sin_2beta) + (COZ*cos_2beta)
C1Y =. COY
C1 =. C1X, C1Y, C1Z
TH =. (2p1 % 5) * i.5
CA =. (C1X * (cos TH),. (sin TH)), "(1 0) C1Z
'C1 C2 C3 C4 C5' =. CA
CAXY =. 0 1{"(1) CA
NB. 対蹠点を求めた後、順序を調整する 09/11/11
CB0 =. (_1* CAXY), "(1 0) (-C1Z)
CB =. 2 |. CB0
'C6 C7 C8 C9 C10' =. CB
C11 =. - C0
C0, CA, CB, C11
)

```


NB. Distance for Check

NB. eg. D1 dist D6 => 5, D6 dist D12 => 5, D6 dist D13 => 5

dist =: 3 : 0

:

'ax ay az' =. x.

'bx by bz' =. y.

%(*: ax-bx) + (*: ay-by) + (*: az-bz)

)

5. 計算されたの頂点の座標値

正12面体{p=5, q=3}の頂点の座標値

```
dodec 2
  1.7013      0  2.22703
0.525731  1.61803  2.22703
_1.37638      1  2.22703
_1.37638     _1  2.22703
0.525731 _1.61803  2.22703
  2.75276      0  0.525731
0.850651  2.61803  0.525731
_2.22703  1.61803  0.525731
_2.22703 _1.61803  0.525731
0.850651 _2.61803  0.525731
  2.22703 _1.61803 _0.525731
  2.22703  1.61803 _0.525731
_0.850651  2.61803 _0.525731
_2.75276      0 _0.525731
_0.850651 _2.61803 _0.525731
  1.37638     _1 _2.22703
  1.37638      1 _2.22703
_0.525731  1.61803 _2.22703
_1.7013      0 _2.22703
_0.525731 _1.61803 _2.22703
```

計算結果の検算

D0 dist D4

2

D0 dist D5

2

D4 dist D9

2

D9 dist D10

2

D5 dist D10

2
 D10 dist D15
 2
 D15 dist D16
 2
 D5 dist D11
 2
 D11 dist D16
 2

正 20 面体 {p=5, q=3} の頂点の座標値

icosa 2
 0 0 1.90211
 1.7013 0 0.850651
 0.525731 1.61803 0.850651
 _1.37638 1 0.850651
 _1.37638 _1 0.850651
 0.525731 _1.61803 0.850651
 1.37638 _1 _0.850651
 1.37638 1 _0.850651
 _0.525731 1.61803 _0.850651
 _1.7013 0 _0.850651
 _0.525731 _1.61803 _0.850651
 0 0 _1.90211

計算結果の検算

C1 dist C5
 2
 C1 dist C6
 2
 C5 dist C6
 2
 C4 dist C5
 2
 C5 dist C10
 2
 C4 dist C10
 2
 C6 dist C10
 2
 C6 dist C11
 2
 C10 dist C11
 2