

複素数の歩みとJのグラフィックス

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2008年12月8日

目次

1	エジプト分数	2
2	バビロンの粘土板	2
3	カルダノ	5
4	16世紀ベネチアの数学勝負－タルタリアと3次多項式	8
5	オイラー	9
6	ガウス	10
7	ハミルトン	12
8	タートルグラフィックスと極座標	15
9	Reference	17

概要

鈴木 [J 言語と複素数](JAPLA 9/2008) で詳細な J 言語上での複素数の解説があった。又 NEWTON 12/2008 は虚数の特集であった。VECTOR 23/4 には *N.Thomson* が複素数と計算の細部を発表している。これらを参照しながら複素数を取扱い J の *plot* をガウスモードにして図を描いてみた。

前夜

1 エジプト分数

古代エジプト文字のヒエログリフには単位分数 ($\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ など) で表された分数の記述がある。

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

分数のエジプト風単位分数への展開は鈴木 JAPLA OCT/2008、西川 JAPLA NOV/2008 が詳しい。

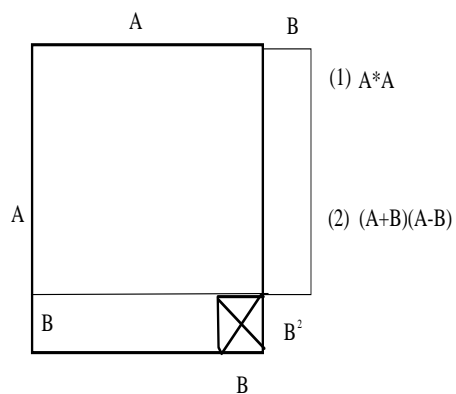
2 バビロンの粘土板

人の定住、農耕、牧畜と家畜化はメソポタミアやその周辺が起源である。

2.1 2次方程式

バビロンの粘土板に次の記述がある。

「正方形の面積から正方形の一辺の長さを引くと
870 になる。正方形の一辺の長さを求めよ」



$x^2 - x = 870$ として J の p. で解を求めると正の
30 となる。

$$\begin{array}{r} p. \quad _870 \quad _1 \quad 1 \\ +---+ \\ |1|30 _29| \\ +---+ \end{array}$$

図1 2次方程式

メソポタミア人の思考は次のようであっただろう。

正方形を潰して長方形にすると面積は減る

A^2 と $(A+B)(A-B)$ では B^2 分減る

$$x^2 - x = 870$$

ニュートン法でも総当たりだ。勘を働かして近そうなところを当たってみる。

870+ 1 4 0.25
871 874 870.25

％: 870+ 1 4 0.25
29.5127 29.5635 29.5

1 2 0.5, .(1 2 0.5) (+, .-) ％: 870+ 1 4 0.25
1 30.5127 _28.5127
2 31.5635 _27.5635
0.5 30 _29

2.2 対角線の長さ

今はイェール大学が保管する紀元前 2000 頃のバビロンの一枚の粘土板には図と楔で次のように書かれている。

正方形の対角線 一辺の長さを 30 としたときの対角線の長さ。解は 42 25 35 と 60 進法で記載されている。

$$\frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3}$$

$\sqrt{2}$ 一辺の長さを 1 とすると対角線の長さは
1 24 51 10

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

42, (24%60), 35%60^2
42 0.4 0.00972222

+ / 42, (25 % 60), 35 % 60^2 NB. 60 notation to 10 notation
42.4264

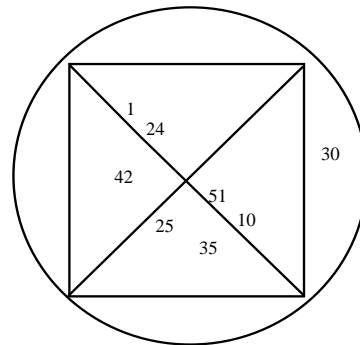


図2 対角線を 60 進法で

1, (24%60), (51%60^2), (10%60^3) NB. 60 notation to 10 notation
 1 0.4 0.0141667 4.62963e_5

+ / 1, (24%60), (51%60^2), (10%60^3)
 1.41421

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを知ってしまったピタゴラスの弟子ヒッパソスは船から水中に投げ込まれて溺死した。(500BC 頃)

J Grammar 基底 (base and antibase)

24 60 60 #. 1 52 50 NB. base
 6770 NB. sec

24 60 60 #: 6770 NB. antibase
 1 52 50 NB. \$1 h 52 min 50 sec\$

2.3 J で更に $-\sqrt{n}$ を反復計算で求める

\sqrt{n} を求める古代バビロニアの時代にさかのぼる反復法がある。

$\sqrt{2}$	x_0 と $\frac{2}{x_0}$ の平均	初期値 = 1	(i.6), .2 fsr ^: (i.6) 1
$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0})$	$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1})$	$= \frac{3}{2}$	0 1
$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1})$	$x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2})$	$= \frac{17}{12} = 1.41667$	1 1.5 2 1.41667
$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2})$	$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12})$	$= \frac{577}{408} = 1.41422$	3 1.41422 4 1.41421 5 1.41421

$\sqrt{5}$	x_0 と $\frac{5}{x_0}$ の平均	初期値 = 1
$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{5}{x_0})$	$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{5}{1})$	$= 3$
$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{5}{x_1})$	$x_2 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3})$	$= \frac{7}{3} = 2.333$
$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{5}{x_2})$	$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{7}{3} + \frac{5}{7/3})$	$= \frac{47}{21} = 2.238095$

今のバビロンはキュロスの末裔の「敵同士を争わせる」策略に乗せられた彼方の新興国の度重なる猛烈な攻撃を受けている。

```

                    5 fr ^:(10) 1
2.23607

power を用いた簡易な反復法 ^:n          (i.10),. 5 fr ^:(i.7) 1

n      ans.
-----
0      1
1      3
2 2.33333
3 2.2381
4 2.23607
5 2.23607
6 2.23607

power に i.n を用いると経過も現れる。

fsr=: 4 : ' -: +/ y,x%y'
fr=: -:@ +/@:( ],[ % ])

%: 5 NB. sqrt of J
2.23607

                    (i.6),. 9 fr ^:(i.6) 2
0      2
1      3.25
2 3.00962
3 3.00002
4      3
5      3

      √9      初期値 = 2
-----
x1 =  $\frac{1}{2}(1 + \frac{2}{9})$  = 3.25
x2 =  $\frac{1}{2}(x_1 + \frac{9}{x_1})$  = 3.0096
x3      3.000015
x4      3.000000

```

複素数の開拓者達

3 カルダノ

東ローマの滅亡とルネッサンス 1453年に東ローマ・ベネチア連合軍 7000 は 26 キロの城壁を守ったがオスマントルコと支配下の動員 10 万の大軍に城壁を突破され、グレコローマ帝国は滅びた。アレキサンドリアに蓄積された科学と些か退廃的なギリシャ文明が未開のヨーロッパにもたらされルネッサンスが興り、ギリシャ正教は広くスラブ社会に根ざした。幕末の 1861 年に渡来したペテルブルクのロシア正教の司教ニコライに伝導は函館から始まり、ニコライ堂には今もグレゴリア聖歌が響く。

連立方程式は中国の「孫子算経」400 頃に著されている。カルダノは複素数を扱っている。

3.1 アルス・マグナ

16 世紀のミラノの医師で数学者であったジョーラモ・カルダノの著書「アルス・マグナ」に用いられている。に次の記述と解が書かれている。

2つの数がある。これらを足すと10になり、かけると40になる。それぞれいくらか

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

$$-y^2 + 10y = 40$$

```
p. _40 10 _1
+---+-----+
|_1|5j3.87298 5j_3.87298|
+---+-----+
```

複素数は2つの次数の組で表されるような平面的広がりを持った数である。

$$z = a + bi \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

J の viewmat は複素数を表すことができる。

```
5      0j5
5j3.87298 5j_3.87298
```

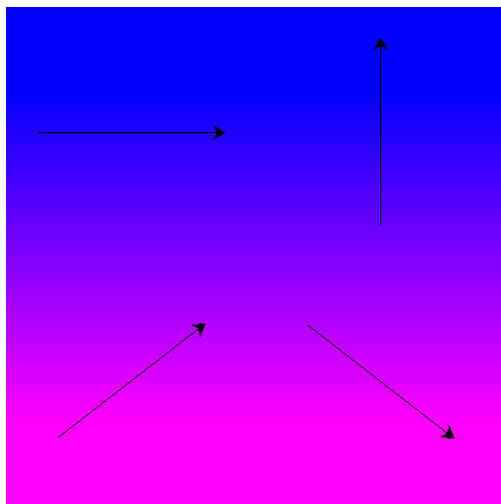


図3 imaginary 5

```
;}. p. _40 10 _1
5j3.87298 5j_3.87298 NB. 多項式の解

+. ;}. p. _40 10 _1
5 3.87298 NB. 実数と虚数に分離
5 _3.87298

*/ 5j3.87298 5j_3.87298
40 NB. 掛け合わせる

*/ 0j3.87298 0j_3.87298
15 NB. 虚数部の掛け合わせ
```

3.2 Jで更に-複素数3態

p.	多項式の解を求める。	<pre>;}. p. _40 10 _1 5j3.87298 5j_3.87298</pre>
+	実数と虚数に分離分離	<pre>+. ;}. p. _40 10 _1 5 3.87298 5 _3.87298</pre>
*	絶対値と偏角 偏角はラジアン	<pre>*. ;}. p. _40 10 _1 6.32456 0.659058 6.32456 _0.659058</pre>
*:	分離した各を2乗する 絶対値の2乗	<pre>^&2 +. ;}. p. _40 10 _1 25 15 25 15 *:> *.&.> }. p. _40 10 _1 6.32456 0.659058 6.32456 _0.659058 *:>*.&.> }. p. _40 10 _1 40</pre>

複素数が現れると非線形連立方程式を解くニュートン法が顎をだす。

3.3 plotのガウスモード

Jの最近のPlotはガウスモードをサポートしており、データに複素数が入ると自動的にデカルトモードからガウスモードに切り替わる。ガウスモードでは実数と虚数 xjy を+. で x,y に分離して、そのまま作図する。従って個別の x の値は不要で受け付けない。複素数のplotは0を適宜

補って作図する。

カルダノの問題を作図してみよう。

```
] a=. ;}. p. _40 10 _1
5j3.87298 5j_3.87298

'line,marker' plot 0 1 0 2{0,a
pd 'eps /temp/cardano0.eps'
```

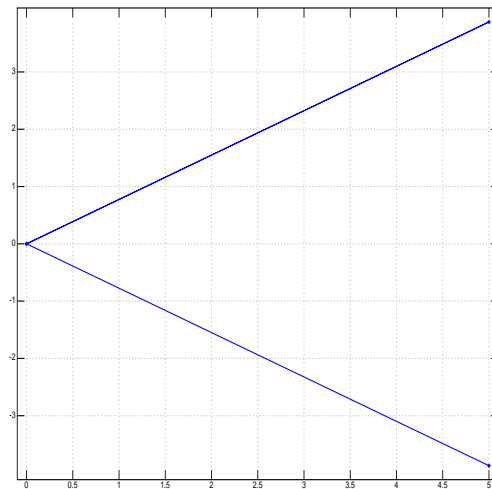


図4 imaginary

右のマーカのポイントは極座標の絶対値である。対角線の長さ = 極座標は実数ではバビロンの時代から求められていた。

4 16世紀ベネチアの数学勝負—タルタリアと3次多項式

タルタリア (1499-1557) は 1534 年にベネチアで数学の試合をして全勝した。タルタリアの方法を執拗に迫って部分的に教えてもらったカルダノが後に己の弟子の成果と合わせアルス・マグナで公表しタルタリアと大いに揉めた。

今日カルダノの公式と呼ばれる。3次方程式の3根の内1つが実数の場合は解ける。

$x^3 + px + q = 0$ の解は

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

<p>商人がサファイアを 520 ダカット (ベネチアの当時の通貨単位) で売った。仕入れ値は儲け値の 3 乗に等しい。儲けを求める。</p> $x^3 + x - 520 = 0$	<pre>p. _520 1 0 1 +-----+ 1 _4j7 _4j_7 8 NB. ans is 8 +-----+</pre>
---	--

現代の公式と比べると音程の不揃いなバロック楽器で奏でるコンサートの趣がある。

5 オイラー

オイラーの公式 (1748) として知られ、ファインマンが世の最も美しい公式と賞賛した。

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\
 e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\
 &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{ix^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{ix^2}{2!} + \frac{ix^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)
 \end{aligned}$$

```
(i.8),. (^j.i.8),.a=(cos i.8),. j. sin i.8
NR      e          cos      sin NB.
```

```
0          1          1          0
1  0.540302j0.841471  0.540302  0j0.841471
2  _0.416147j0.909297 _0.416147  0j0.909297
3  _0.989992j0.14112 _0.989992  0j0.14112
4  _0.653644j_0.756802 _0.653644  0j_0.756802
5  0.283662j_0.958924  0.283662  0j_0.958924
6  0.96017j_0.279415  0.96017  0j_0.279415
7  0.753902j0.656987  0.753902  0j0.656987
```

*1

t. はテイラー関数。

```
(^t.i.8),(cos t. i.8),: sin t. i.8
1 1 0.5 0.166667 0.0416667 0.00833333 0.00138889 0.000198413
1 0 _0.5 0 0.0416667 0 _0.00138889 0
0 1 0 _0.166667 0 0.00833333 0 _0.000198413
```

*1 円関数の数学定義を用いるには require 'trig' が必要

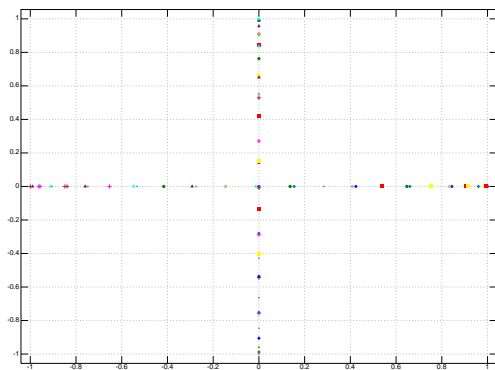


図5 euler/cos isin

x 軸には \cos が実部のみで虚数を持っていないので並び、y 軸には \sin が虚数のみなので並び。 e は円環となる。

```
'marker' plot (^j.i.36)
,.(cos i.36),.j.sin i.36
```

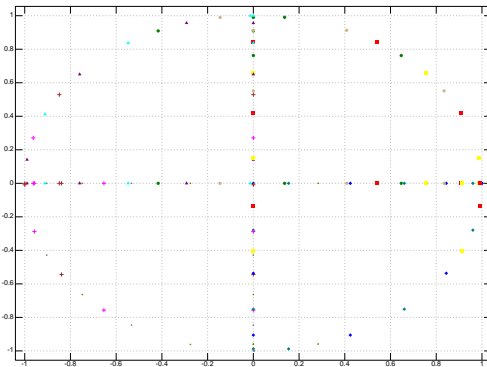


図6 euler/e cos isin

6 ガウス

ガウスの正 n 角形の作図法。多項式を解き複素数で作図する。

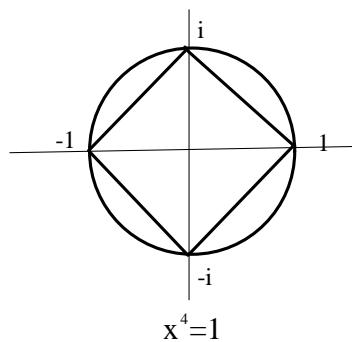


図7 gauss の正方形

正3角形 $x^3 = 1$	<pre>}; p. _1 0 0 1 1 _0.5j_0.866025 _0.5j_0.866025</pre>
-------------------	---

正 4 角形 $x^4 = 1$	<pre> };}. p. _1 0 0 0 1 1 0j1 0j_1 _1 </pre>
正 5 角形 $x^5 = 1$	<pre> };}. p. _1 0 0 0 0 1 1 0.309017j0.951057 0.309017j_0.951057 _0.809017j0.587785 _0.809017j_0.587785 </pre>
正 17 角形 $x^{17} = 1$	<pre> 9 2 \$ };}. p. _1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 NB. 0(16) 1 0.932472j0.361242 0.932472j_0.361242 0.739009j0.673696 0.739009j_0.673696 0.445738j0.895163 0.445738j_0.895163 0.0922684j0.995734 0.0922684j_0.995734 _0.273663j0.961826 _0.273663j_0.961826 _0.602635j0.798017 _0.602635j_0.798017 _0.850217j0.526432 _0.850217j_0.526432 _0.982973j0.18375 _0.982973j_0.18375 </pre>

```

] a=.;}. p. _1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
'line,marker' plot ({:a1), a1=. (/;{: "1 *. a){;a

```

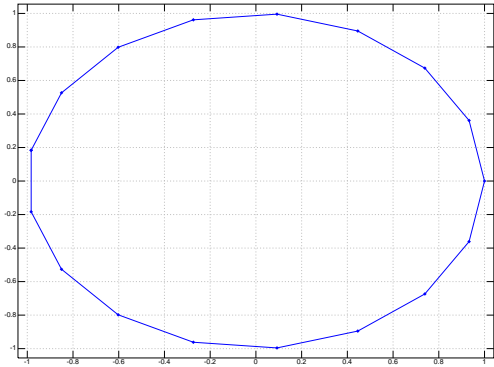


図 8 gauss の 17 角形

7 ハミルトン

1843 年にダブリン郊外のロイヤル運河を妻と散歩中のハミルトンは閃いた 4 元数の刻印をブルーム橋に残した。クォータニオンはに 100 年以上を経て量子力学やコンピュータグラフィックスで大活躍している。

8 元数 (オクトニオン) もグレイブス (1843), ケーリー (1845) によって同時期に発見されたが実用化はこれからである。

7.1 N.Thomson

以下は *N.Thomson* によるハミルトニアンである。

input		<pre> R10 +---+---+-----+-----+ 1 0 0 1 0j1 0 0 0j1 +---+---+-----+-----+ </pre>
-------	--	--

I, i, j, k	I, i, j, k	<pre>a=. c2ltom &.> R10 +---+---+---+---+ 1 0 0 _1 0j1 0 0 0j1 0 1 1 0 0 0j_1 0j1 0 +---+---+---+---+ I i j k</pre>
クォータニオン ²	$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$	<pre>times~ i;j;k NB. +---+---+---+ _1 0 _1 0 _1 0 0 _1 0 _1 0 _1 +---+---+---+ (i +/ . * j) +/ . * k _1 0 0 _1</pre>
クォータニオン ⁴	$i^4 = j^4 = k^4 = 1$	<pre>times^^:2 i;j;k +---+---+---+ 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 +---+---+---+</pre>

次のようにも計算できる。 i, j, k の順を入れ替えると変化する。

a (+/ .* &.>) a

(i;j;k) times i;j;k

7.2 4次全行列環

実数体 \mathbf{R} 上の4次元行列環 $M_4(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{pmatrix}, \quad x, y, z, w \in \mathbf{R}$$

NB. x は単位行列

I2=: 4 4 \$(_1 1 _1 1)(1 4 11 14)}16#0 NB. y

J2=: 4 4 \$ (_1 1 1 _1)(2 7 8 13)}16#0 NB. z

K2=: 4 4 \$ (_1 _1 1 1)(3 6 9 12)}16#0 NB. w

I2;J2;K2

```

+-----+-----+-----+
|0 _1 0 0|0 0 _1 0|0 0 0 _1|
|1 0 0 0|0 0 0 1|0 0 _1 0|
|0 0 0 _1|1 0 0 0|0 1 0 0|
|0 0 1 0|0 _1 0 0|1 0 0 0|
+-----+-----+-----+

```

times~ I2;J2;K2

```

+-----+-----+-----+
|_1 0 0 0|_1 0 0 0|_1 0 0 0|
| 0 _1 0 0| 0 _1 0 0| 0 _1 0 0|
| 0 0 _1 0| 0 0 _1 0| 0 0 _1 0|
| 0 0 0 _1| 0 0 0 _1| 0 0 0 _1|
+-----+-----+-----+

```

times~ ^:2 I2;J2;K2

```

+-----+-----+-----+
|1 0 0 0|1 0 0 0|1 0 0 0|
|0 1 0 0|0 1 0 0|0 1 0 0|
+-----+-----+-----+

```

```
|0 0 1 0|0 0 1 0|0 0 1 0|
|0 0 0 1|0 0 0 1|0 0 0 1|
+-----+-----+-----+
```

ハミルトニアンの ijk の計算順序と \pm

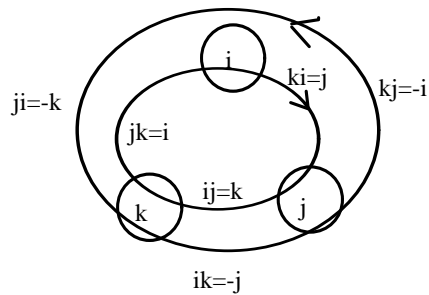


図9 hamiltonian

7.3 Script

```
NB. Norman Thomson Vector Vol23 NR4
ln_nt=(^.@{. , }.)@*. NB. log length and angle
det=: -/ . *          NB. determinant
r21tom=: ,_1 1 &*@|. NB. matrix from real 2-list
c21tom=: ,.+@|.@(*&1 _1) NB. matrix from complex 2-list
times=: +/ . *>.
NB. -----DATA thomson-----
'I i j k'=: c21tom &>. R10=:1 0;0 1;0j1 0;0 0j1
```

8 タートルグラフィックスと極座標

極座標と言えば *LOGO* で一世を風靡した *turtle graphics* がある。*Fasar Jackson(NZ)* により *J* に移植されており、チュートリアルが *LAB* に入っている。

```
require 'turtle'
```

```
show repeat 6 fd 1 rt 60
```

タートルグラフィックスはラジアンでなく degree である。
J の円関数は *radian* で定義されているので *degree* に変換するにはつぎによる。

^a

```
sin_d=: 1&o. @(*&1r180p1)
```

```
cos_d=: 2&o. @(*&1r180p1)
```

^a *Primer* によった。numeric のファイルには *sind, cosd* が定義されているのでそちらを用いても良い。

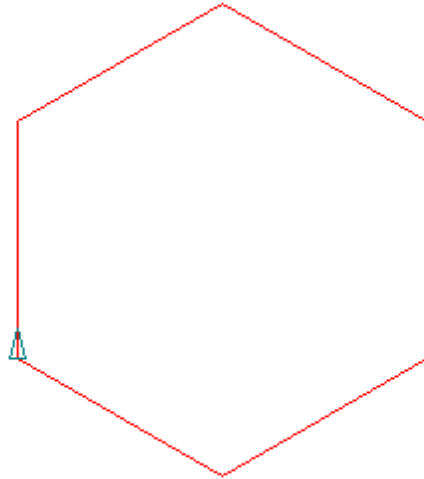


図 10 turtle with turtle

複素数は座標の指定に用いられる。

```
show 1j3 2j4 3j5 4j4 5j3 start sq 0.8
```

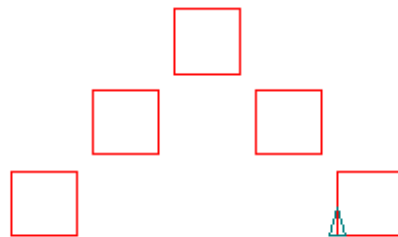


図 11 複素数による座標

9 Reference

- ロバート・L・デバニー [カオス力学系の基礎] ピアソン・エデュケーション 1997/2007
西山亨 [多項式のラブソディ] 日本評論社 1999
竹内薫 「へんな数式美術館」技術評論社 2008
NEWTON 2008/12号 [虚数がよくわかる] Newton Press
鈴木義一郎「J言語と複素数」JAPLA 10/2008
Norman Thomson [If you think J is complex try j] Vector Vol.23 Nr.4