ゲームの木とワーシャルフロイド法

SHIMURA Masato
jcd02773@nifty.ne.jp

2008 年 12 月 8 日

目次

1 ゲームの木ー展開型ゲーム

展開型のゲームでは行動戦略がゲームの木で定式化される。
簡単な方法でナッシュ均衡と期待値を求める。
展開型ゲームは交互手番であるので作戦は読みやすい。

$A \setminus B$	$B1$	$B2$
$A1$	$\mathbf{6}, 4$	$0, \mathbf{5}$
$A2$	$5, \mathbf{3}$	$\mathbf{2}, 2$

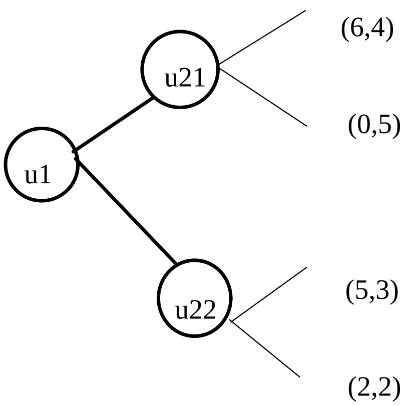
NB. 戦略型のテーブル

このケースでは戦略型のナッシュ均衡は存在しない。

```
   S1                                   gmatrix S1
+---+---+---+---+                    +---+---+
|6 4|0 5|5 3|2 2| NB. input          |6 4|0 5|
+---+---+---+---+                    +---+---+
                                     |5 3|2 2|
                                     +---+---+
```

1.1 完全記憶

完全記憶ではハンドは全て既知であり、$u2$ は $u1$ の選択したハンドを知りうる。



完全記憶の戦略型テーブル

$A \setminus B$	$B10$	$B11$	$B20$	$B21$
$A1$	$6,4$	$6,4$	$0,5$	$0,5$
$A2$	$5,3$	$2,2$	$5,3$	$2,2$

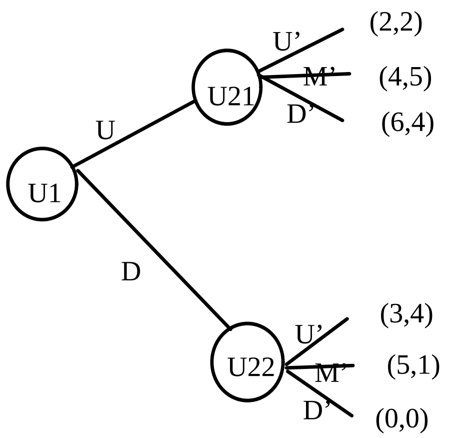
完全記憶では戦略型より組み合わせが増える。このテーブルからナッシュ均衡を求める。

$A \setminus B$	$B10$	$B11$	$B20$	$B21$
$A1$	$\mathbf{6},4$	$\mathbf{6},4$	$0,\mathbf{5}$	$0,\mathbf{5}$
$A2$	$5,\mathbf{3}$	$2,2$	$\mathbf{5},\mathbf{3}$	$\mathbf{2},2$

$A\ suppose \rightarrow\ best\ of\ B$, Column A1 is 5 ,Column- A2 is 3
$B\ suppose \rightarrow\ best\ of\ A$ at Raw is B10,B11=6 ,B20=5 , B21=2
$both\ bold\ is\ A2, B20 = (5,3)$
双方にマークが入ったところがナッシュ均衡である。
完全記憶ではナッシュ均衡が存在し、A2,B20=(5,3) である。
次の不完全記憶では混合戦略で (4,3.5) になる。

■J Grammar　戦略型マトリクスに戻す。

完全記憶を戦略型マトリクスに戻すのに便利なスクリプトを作成し、ナッシュ均衡をマークする。下段で (1, 1) が入ればナッシュ均衡である。




```
   mk_submatrix S2
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|2 2|2 2|2 2|4 5|4 5|4 5|6 4|6 4|6 4|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|3 4|5 1|0 0|3 4|5 1|0 0|3 4|5 1|0 0|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+

   calc_exp_nash S2
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|2 2|2 2|2 2|4 5|4 5|4 5|6 4|6 4|6 4|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|3 4|5 1|0 0|3 4|5 1|0 0|3 4|5 1|0 0|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|0 0|0 0|1 0|1 1|0 1|1 1|1 0|1 0|1 0|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|1 1|1 0|0 0|0 1|1 0|0 0|0 1|0 0|0 0|
+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
```

展開型は多くのナッシュ均衡が現れることが多い。ブラスや合唱のコンペティションでは一位二

位ではなく、金賞、銀賞という評価で相当数の出演者を表彰することがある。金メダルではなく表彰台相当というところか。それでも順位をはっきりさせたい場合は部分ゲームの解析に進む。

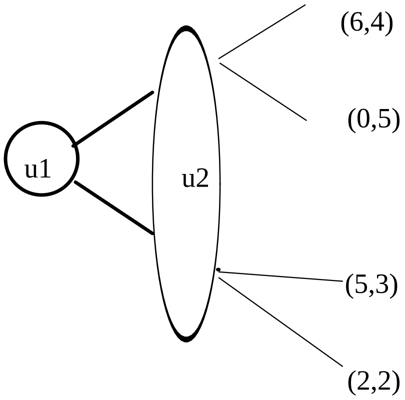
1.1.1 Script

```
NB. make complete memory strategy martix
mk_submatrix=: 3 : 0
IND0=: {(IND2=.2, -: $ y) $ i. # y
SIZE=: (# IND0), #&>& {. IND0

IND1=:( ({: SIZE) # ; {. IND0),;({: SIZE) # {: IND0
(2,-: $ TMP) $ TMP=:IND1{y
)

calc_exp_nash=: 3 : 0
NB. calc_nash eq.
NB. u S1
TMP1=. mk_submatrix y
MAXB=.{@>(>./"1) TMP0=. ;("1) {: L:0 TMP1
BX=.({TMP0) e. L:0 MAXB    NB. raw B-xax
MAXA=.>/"1 |: ;("1) {. L:0 TMP1
AX=.MAXA;-. L:0 MAXA       NB. column a max
NASH=.TMP1, ({@> ;("1) ,.AX), L:0 {@> ;("1),. BX NB. composition
)
```

1.2 不完全記憶

混合戦略の均衡利得
$x_1^* = p^* A q^{*T}$
$x_2^* = p^* B q^{*T}$

```
A is 6 0    B is 4 5
     5 2         3 2

a=. A;B
```



$A \setminus B$	$B1$	$B2$
$A1$	$6,4$	$0,5$
$A2$	$5,3$	$2,2$

不完全記憶の展開型を戦略型に戻す。情報が足りないのでここでは通常の戦略型と同じになる。ナッシュ均衡は存在しないので、混合戦略で確率を求める。

```
    1 x: L:0 mix_2 S1
+---+--------+-------+
|6 0|0 3  2  |1 0  _1|
|5 2|3 0 _3  |0 1 2r3|  NB. q*
+---+--------+-------+
|4 5| 0 _2 _3|1 0 1r2|  NB. p*
|3 2|_2  0 _1|0 1 3r2|
+---+--------+-------+
```

$$p = \frac{1}{2},\ \ q = \frac{2}{3}$$

```
  1r2 1r2 +/ . * (L:0) a +/ . * (L:0) 2r3 1r3
+-+----+
|4|7r2|
+-+----+
```

$x_1^*, x_2^* = 4, 3.5$ NB. 混合戦略のスコア

2 ゲームのシュミレーション

展開型ゲームのハンドの確率は $p, 1-p$ や $q, 1-q$ などと書かれる。実際の数値でシュミレーションを行ってみよう。

2.1 確率構造の完全記憶ゲーム/ジレンマ型恋愛ゲーム

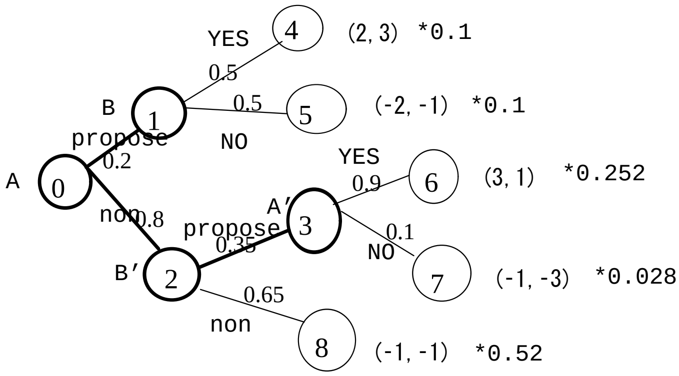


図 1 gametree1

A 君と B さんの恋愛ゲーム。A 君は思っていても行動力が足りない $(p = 0.2, 1 - p = 0.8)$。
B さんは自分から思っていても自分から言い出すタイプではない。しびれを切らした B' の行動は $(q' = 0.35, 1 - q' = 0.65)$ である。そこで生意気にも A が断るのは $(1 - p' = 0.1)$
この恋愛の成功率は A 君で 2 割、B さんは絶望である。

(例題の出典:佐々木)

2.2 期待値を計算する

最初に数式を追ってみと、期待値は次により求めることができる。

π_A, π_B	(A,B)	
pq	2,3	$0.2 \times 0.5 = 0.1$
$p(1-q)$	-1,-1	$0.2 \times 0.5 = 0.1$
$(1-p)q'p'$	3,1	$0.8{\times}0.35{\times}0.9 = 0.252$
$(1-p)q'(1-p')$	-1,-3	$0.8{\times}0.35{\times}0.9 = 0.028$
$(1-p)(1-q')$	-1,-1	$0.8 \times 0.65 = 0.52$

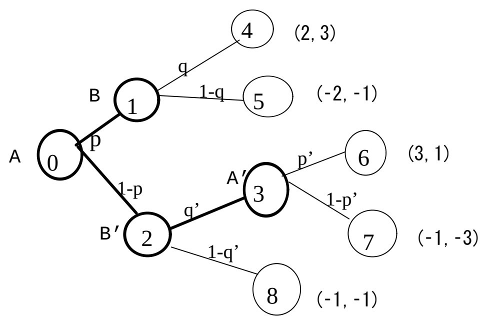


図 2 gametree

$\pi_A = p(4q - 1) + 4p'q'(1 - p) - 1$
$\pi_B = 4pq + 2q'(2p' - 1)(1 - p) - 1$

```
(0.2*<:4*0.5)+(4 *0.9 *0.35 *0.8)-1
0.208   NB. pi_A
   (4*0.2*0.5)+(*/ 2 0.35 0.8 0.8)-1
_0.152  NB. pi_B
```

2.3 ワーシャル · フロイド法を用いる。

最短距離を求めるワーシャル · フロイド法は行と列の加算の外積 (+/) を計算し比較して最少を採る。ここでは確率をサムアップするので通常の乗算の外積 (*/) を用いる。

ネットワークに用いるノードと確率

```
   S0
0 1  0.2
0 2  0.8
1 4  0.5
1 5  0.5
2 3 0.35
2 8 0.65
3 6  0.9
3 7  0.1
```

ワーシャルフロイド法のマトリクスに展開する。
（上三角行列でよい）

```
   make_mat_half S0
_ 0.2 0.8    _   _   _   _   _    _
_   _   _    _ 0.5 0.5   _   _    _
_   _   _ 0.35   _   _   _   _ 0.65
_   _   _    _   _   _ 0.9 0.1    _
_   _   _    _   _   _   _   _    _
_   _   _    _   _   _   _   _    _
_   _   _    _   _   _   _   _    _
_   _   _    _   _   _   _   _    _
_   _   _    _   _   _   _   _    _
```

確率をサムアップしたものは太字の箇所に現れる。

ワーシャル · フロイト法はネットワークでの最小値 ($a \geq b$) を選択するプロセスであるので、最少確率が計算できる。

```
   wf_gtree   make_mat_half S0
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		0.2	0.8	0.28	**0.1**	**0.1**	**0.252**	**0.028**	**0.52**
1					0.5	0.5			
2				0.35			0.315	0.035	0.65
3							0.9	0.1	

```
   ] a1=._5{.{.a
0.1 0.1 0.252 0.028 0.52

   c
+---+-----+---+-----+-----+
|2 3|_2 _1|3 1|_1 _3|_1 _1|
```

```
+---+-----+---+-----+-----+

 (;("1),.c),.a1,. ;("1),. c * L:0 {@> a1
 A  B   p     A*p    B*p
 2  3   0.1    0.2    0.3
_2 _1   0.1   _0.2   _0.1
 3  1 0.252  0.756  0.252
_1 _3 0.028 _0.028 _0.084
_1 _1  0.52  _0.52  _0.52

+/ (;("1),.c),.a1,. ;("1),. c * L:0 {@> a1
1 _1 1 0.208 _0.152   NB. sum
```

$\pi_A = 0.208, \pi_B = -0.152$ である。

2.4 ナッシュ均衡

この例題のナッシュ均衡は天下り的に示せば $(2,3),(3,1)(-1,-1)$ である。

前側から演繹的にナッシュ均衡を求める手続きは相当複雑であり、次の部分ゲームに分解して「部分ゲーム完全ナッシュ均衡」を求める方が容易である。

2.4.1 Example

出典:佐々木 P195

確率がプロポーズする方に多くなるように修正されている。

```
   make_mat_half S9
_ 0.9 0.1   _   _   _   _   _   _
_   _   _   _ 0.7 0.3   _   _   _
_   _   _ 0.2   _   _   _   _ 0.8
_   _   _   _   _   _ 0.5 0.5   _
_   _   _   _   _   _   _   _   _
_   _   _   _   _   _   _   _   _
_   _   _   _   _   _   _   _   _
_   _   _   _   _   _   _   _   _
_   _   _   _   _   _   _   _   _

wf_gtree   make_mat_half S9
NB. 1   2   3   4    5    6    7    8
```

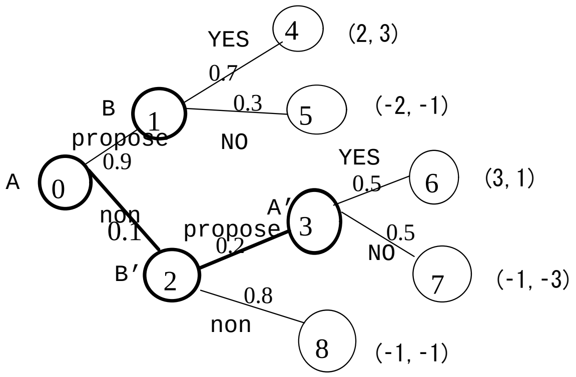


図 3　gametree1

_	0.9	0.1	0.02	0.63	0.27	0.01	0.01	0.08
_	_	_	_	0.7	0.3	_	_	_
_	_	_	0.2	_	_	0.1	0.1	0.8
_	_	_	_	_	_	0.5	0.5	_
_	_	_	_	_	_	_	_	_
_	_	_	_	_	_	_	_	_
_	_	_	_	_	_	_	_	_
_	_	_	_	_	_	_	_	_
_	_	_	_	_	_	_	_	_

6、7 は 1% の生起確率に過ぎない。しかし、確率を付与しないで次の部分ゲーム完全の値を求めるとここの (3, 1) が勝ち残る。

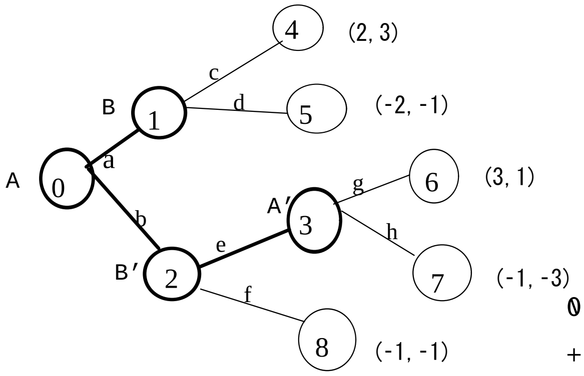
2.5　記号処理

経路を記号処理で行ってみる。$(p, 1-p), (q, 1-q)$ 等は記号演算では *abcd* で済ませ、後で正規表現で書き戻せばよい。

3　部分ゲームとナッシュ均衡の精緻化

展開型ゲームはハサミで切り分けて, 次のような最少ユニットが残れば部分ゲームが発生する。

部分ゲームも独立したゲームでありナッシュ均衡を求めることができる。部分ゲームの中にさら

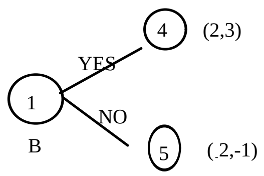


A

```
wf_ctree C0
0  1 2 3  4   5  6  7   8
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|a|b|eb|ca|da|geb|heb|fb|
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |c |d |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|e |_ |_ |ge |he |f |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |g  |h  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
|_|_|_|_ |_ |_ |_  |_  |_ |
+-+-+-+--+--+--+---+---+--+
```

```
mk_cmat C0
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|a|b|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|c|d|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|e|_|_|_|_|f|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|g|h|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
+-+-+-+-+-+-+-+-+-+
```

に部分ゲームを含むこともある。



部分ゲームの最少ユニット。一人ゲームとなるので手番の方の最大値がナッシュ均衡となる。。

部分ゲームでナッシュ均衡になっているのは強固なナッシュ均衡である。

フィギュアスケートでならば各グランプリ大会

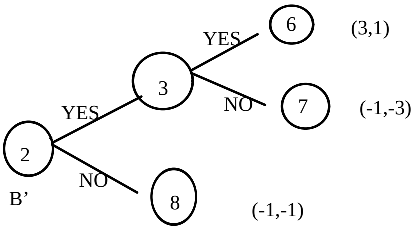
この部分ゲームを遡るとチャンピオンのナッシュ均衡が決まる。部分ゲーム完全均衡である。グランプリファイナルである。

*1

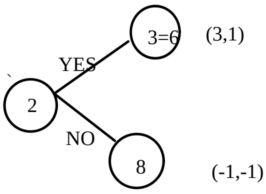
4　ステージゲーム/ジレンマゲームの展開

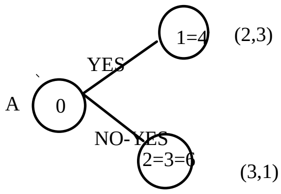
■草枕の旅　熊本時代の漱石が同僚と男 2 人旅で訪れたのは小天温泉で 1907 年の暮れから正月であった。

[1] 完全にはスクリプトに置き換えていない。




```
a=. (<3 1;_1 _3),<_1 _1
+-----------+-----+
|+---+-----+|_1 _1|
||3 1|_1 _3||     |
|+---+-----+|     |
+-----------+-----+
```



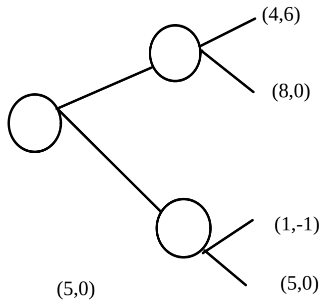


変則タイプにも対応できるようにした。
このタイプのままでナッシュ均衡を求めると (_1 _1) もナッシュ均衡となる。

```
   mk_submatrix2 S5
+-----+-----+
|3 1  |_1 _3|
+-----+-----+
|_1 _1|_1 _1|
+-----+-----+

calc_exp_nash
mk_submatrix2 S5
+-----+-----+
|3 1  |_1 _3|
+-----+-----+
|_1 _1|_1 _1|
+-----+-----+
|1 1  |0 0  |
+-----+-----+
|0 1  |1 1  |
+-----+-----+
```

しかし　先に 2 ブランチのミニゲームを終えると再度 one on one となり (_1 _1) は消える。

最後の決勝戦で手番は A。A は (3, 1) を選ぶ



このようなユニットも部分ゲームになることがある。

```
   calc_exp_nash S3
+----+---+----+---+
|4 6 |4 6|8 0 |8 0|
+----+---+----+---+
|1 _1|5 0|1 _1|5 0|
+----+---+----+---+
|1 1 |0 1|1 0 |1 0|
+----+---+----+---+
|0 0 |1 1|0 0 |0 1|
+----+---+----+---+
```

<table>
<tr><td>構成</td><td>ゲームスコア</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>$A\backslash B$</td><td>現状維持</td><td>値下げ</td></tr>
<tr><td>現状維持</td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>値下げ</td><td>C</td><td>D</td></tr>
</table>
</td><td>A が現状維持 B,C が片方が値下げ D が双方値下げになる。</td></tr>
<tr><td>
<pre>
  gmatrix GN1
        現状維持 値下げ
              +---+---+
現状維持 |3 3|0 4|
              +---+---+
値下げ |4 0|1 1|
              +---+---+
</pre>
</td><td>戦略型のナッシュ均衡は (D, D) の値下げ競争である。</td></tr>
</table>

このゲームの展開型。ナッシュ均衡はやはり裏切りである。

```
 a=.  mk_submatrix GN1
+---+---+---+---+
|3 3|3 3|0 4|0 4|
+---+---+---+---+
|4 0|1 1|4 0|1 1|
+---+---+---+---+
```

$$\begin{array}{llll} l_{11} & l_{21} & & \\ & \nearrow & 3,3 & A \\ \nearrow & \searrow & 0,4 & B \\ \searrow & \nearrow & 4,0 & C \\ & \searrow & 1,1 & D \end{array}$$

```
 calc_exp_nash  a
+---+---+---+---+
|3 3|3 3|0 4|0 4|
+---+---+---+---+
|4 0|1 1|4 0|1 1|
+---+---+---+---+
|0 0|1 0|0 1|0 1|
+---+---+---+---+
|1 0|0 1|1 0|1 1|
+---+---+---+---+
```

4.0.1

繰り返しゲームに展開する場合、ツリー構造で説明されることが多い。2 回繰り返した場合の組み合わせを展開すると次のようになる。

l_{11}				l_{21}		$l_{12,15}$	$l_{22,25}$		
							↗	6, 6	$A+A$
						↗	↘	3, 7	$A+B$
					↗	↘	↗	7, 3	$A+C$
				↗			↘	4, 4	**A+D**
			↗	↘			↗	3, 7	$B+A$
		↗			↘	↗	↘	0, 8	$B+B$
	↗					↘	↗	4, 4	$B+C$
↗							↘	1, 5	**B+D**
↘							↗	7, 3	$C+A$
	↘					↗	↘	4, 4	$C+B$
		↘			↗	↘	↗	8, 0	$C+C$
			↘	↗			↘	5, 1	**C+D**
				↘			↗	4, 4	$D+A$
					↘	↗	↘	1, 5	$D+B$
						↘	↗	5, 1	$D+C$
							↘	2, 2	**D+D**

```
   |: combi_2 i.4
0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3
0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3
```

次の上欄の構成に合わせゲームスコアを加算すると下欄の様になる。

```
   tree_game  GN1
+-------+-------+-------+-------+
|0 0 0 0|1 1 1 1|2 2 2 2|3 3 3 3|  NB. 構成 一回目
|0 1 2 3|0 1 2 3|0 1 2 3|0 1 2 3|  NB.      2 回目
+-------+-------+-------+-------+
|6 3 7 4|3 0 4 1|7 4 8 5|4 1 5 2|  NB. スコア A
|6 7 3 4|7 8 4 5|3 4 0 1|4 5 1 2|  NB. スコア B
+-------+-------+-------+-------+
```

4.1 トリガー戦略とオウム返し戦略

ジレンマ型ステージゲームで

有限回繰り返す場合 1. 有限回を知っている場合は、(最後に) 裏切ることがナッシュ均衡

2. 有限回の存在や回数をを知らない場合は信頼が生まれる。(Neyman)

3. 複数のナッシュ均衡がある場合は信頼が生まれる。(Benoit and Krishna)

無限回繰り返す場合 信頼を前提にトリガー戦略やオウム返しが有効

トリガー戦略 引き金に手を掛けて相手の出方を待つ。裏切ったらズドンと一発で後は氷のナッシュ均衡にはいる。

信頼の期待利益は 今回が 3、次回が p, その次が p^2 とすると

$3 + 3p + 3p^2 + \cdots = \dfrac{3}{1-p}$

裏切りや引き金を引いた場合の期待利益は, 最初が 4, 次回以降は 1 であるので

$4 + (1p) + (1p^2) + \cdots = 4\dfrac{p}{1-p} = \dfrac{4-3p}{1-p}$

$\dfrac{3}{1-p} > \dfrac{4-3p}{1-p}$

$p > \dfrac{1}{3}$ の場合は双方共トリガー戦略がナッシュ均衡になる。

しっぺ返し 裏切られたら仕返しをする。寛容な場合はすぐ許すし、許さないを当面続けてまた許すのもある。永久に許さないとトリガー戦略になる。

信頼の期待値

$\dfrac{3}{1-p}$

仕返しの期待値

$\dfrac{4-3p}{1-p}$

あまり裏切らない場合は寛容に戻った方が期待値は高いが許容度は様々である。

裏切りのインセンティブ EC のカルテルに対する課徴金は全世界の売上の 10% にも達する。一方挙証の容易性確保のためリニエンシーを定め、最初に駆け込んだ場合は全額、2 番目は半額、3 番目は 30% など 3 社までは減免措置ができると定めている。

ステージゲームと国際カルテルに関して興味深い研究がなされている。(概してゲーム論者は囚人のジレンマに懐疑的なようだが、多額の課徴金と他国でも同様の調査の懸念があることから駆け込みも多いようだ。)

5 Script

```
wf_gtree=: 3 : 0
NB. Calc once//calc engine
NB. Warshall Floyd method for game tree
NB. */ for probability
NB. calc with non trace
NB. Usage: wf_non y.
Y0=. y
```

```
for_ctr. i.  # Y0  do.
Y0=. ((ctr {"1 Y0)*/ ctr{ Y0) <. Y0
end.
)
```

6 Reference

佐々木宏夫「入門 · ゲーム理論」2003 日本評論社
岩成 川越　木村　松八重　滝沢「国際カルテルに対するリニエンシー制度の国際協調問題。」RIETI Discussion paper 06J014