『逆正弦の法則』

幸運の女神は必ずしも公平ではない！ ……… 逆正弦の法則

実力が互角の甲と乙が、２００００回の勝負を続けたとする。このとき、「甲がリードしている回数の合計が１０回以下」といった偏った結果の起こる確率は、どのくらいあるだろうか。実力が互角だから、リードしている回数の比率が１０〇対１９９９９のようなアンバランスな結果になることは、まず起こり得ないだろうと思われるかもしれない。ところが、甲が１０回以下のリードで終わるケースの確率を算出してみると、なんと１．５％以上ある。だから逆に、甲が１９９９０回リードしてしまう場合の可能性だって、１．５％あることになる。つまり、甲か乙のどちらかが１０回までのリードで終わってしまう確率は、３％あるということになる。

例えば、１分間に１度の割合で１４０日間勝負を続けると、ほぼ２００００回の勝負をしたことになる。このとき、一方が１３９日と２３時間５０分リードしているといった現象の起こる確率が、なんと３０回に１回程度は起こるということになる。

そこで、甲がリードしている時間と、その確率の関係を調べてみると、比率が丁度半々になるときが最低で、両端で大きな値になる。ちなみに、２００００回の勝負では、甲がリードしている比率が９９００対１０１００から１０１００対９９００の範囲にある確率が０．６４％と算出され、比率が対等になるよりは、どちらかに偏るほうが、はるかに確からしいことが分かる。

つまり長丁場の勝負では、どちらか一方が長時間リードしているほうがヨクアルコトで比率が均等に近くなることのほうが、むしろメッタニナイコトなのである。甲のリード時間の確率を連続曲線で近似してみると、正弦（サイン）関数の逆関数になることから、このような現象のことは、『逆正弦の法則』と呼ばれている。

ランダム・ウォークの点を｛$X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots\cdots$｝とすると、ｎ時点での戦績の点は

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots\cdots + X_n \quad S_0 = 0$$

のように表される。

さて、ｎ時点で戦績の点がｒにある確率を$p(n, r)$と表すと、

$$p(n, r) = \Pr\{S_n = r\} = {}_nC_{(n+r)/2}\, 2^{-n}$$

と与えられることが示される。ここで、上記の確率が定義できるためには(ｎ＋ｒ)/２が整数値の場合に限られる。特に、時点ｎ＝２ｍで戦績の点が０になる(ｒ＝０)場合の確率を$u(2m)$と表すと

$$u(2m) = p(2m, 0) = \Pr\{S_{2m} = 0\} = {}_{2m}C_m\, 2^{-2m} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

のように表現できる。さらに、ｎ＝２ｍで初めて戦績の点が０になる確率を$f(2m)$と表す。つまり

$$f(2m) = \Pr\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots\cdots\cdots, S_{2m-1} \neq 0, S_{2m} = 0\}$$

この$f(2m)$と$u(2m)$との関係には

$$u(2m) = f(2)u(2m-2) + f(4)u(2m-4) + \cdots\cdots\cdots + f(2m)u(0) \quad (n \geq 1)$$

といった関係が成り立つ。

さらに

$$f(2m) = u(2m-2) - u(2m)$$

$$f(2m) = \frac{1}{2n-1}u(2m)$$

といった関係も得られる。

【逆正弦法則(Arcsine law)】

時点２ｋで戦績の点が０になった後でｎ＝２ｍまで一度も０にならないケースの確率を$a(2k, 2m)$と表す。つまり

$$a(2k, 2m) = \Pr\{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \cdots\cdots\cdots, S_{2m} \neq 0\}$$

このとき、

$$a(2k, 2m) = u(2k)u(2m-2k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m$$

のように表現できる。

【滞在時間に関する逆正弦法則】

（０，２ｍ）の時点経過の間で、２ｋの間は正の領域にあり、残る２ｍ－２ｋの間は負の領域にあるケースの確率は$a(2k, 2m)$と与えられる。

ｍ＝１０の場合の離散逆正弦分布

	ｋ＝０ ｋ＝１０	ｋ＝１ ｋ＝９	ｋ＝２ ｋ＝８	ｋ＝３ ｋ＝７	ｋ＝４ ｋ＝６	ｋ＝５
$a(2k,2m)$	0.1762	0.0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.0606

なお、離散逆正弦分布$a(2k,2m)$は、次のような連続型の逆正弦分布で近似できる。

$$a(2k,2m) \cong \frac{1}{m} f(x_k) = \frac{1}{m\pi\sqrt{x_k(1-x_k)}}, \qquad x_k = \frac{k}{m}$$

そこで、$u(2m)$や$a(2k,2m)$を求める関数を次のように定義する。

```
   u_k=:3 :'((!+:y.)%*:!y.)*2^-+:y.'
   a_kn=:3 :'(u_k{.y.)*u_k--/y.'
   a_kn"_1(i.3),.2
0.375 0.25 0.375
   a_kn"   a_kn"_1(i.6),.10
0.176197 0.0927353 0.0736427 0.0654602 0.0616837 0.0605621


   rw1=:13 :'(?y.$2){_1 1'
   rw2=:13 :'*(?y.$2)-0.5'
   rw3=:13 :'*(?y.$10)-4.5'
   rw4=:[:*([:?]$5:*2:)-9:%2:
```

]R=:?10$2
 	
1 0 1 1 0 0 1 0 0 1
   R{_1 1
1 _1 1 1 _1 _1 1 _1 _1 1
   *R-0.5
1 _1 1 1 _1 _1 1 _1 _1 1
   +/¥ *R-0.5
1 0 1 2 1 0 1 0 _1 0
	+/*+/¥ *R-0.5
	
	4
	   +/*+/¥ rw4 10
	_9
	   +/*+/¥ rw4 10
	3
	   +/*+/¥ rw4 10
	_10

```
   asl=:4 :0
```

```
   6!:2'r0=.10000 asl 10'
```

```
NB. ARCSIN LAW
rw=:[:*([:?]$5:*2:)-9:%2:
q=.i:y.+r=.0
while. x.>+/r
   do. r=.r+q=+/*+/\ rw y.
end.
q,.r
)
```

```
0.893301
   6!:2'100000 asl 10'
8.91441
   6!:2'100000 asl 20'
9.91042
   6!:2'200000 asl 100'
36.9451
   r1=:100000 asl 10
   r2=:,.{:"1(100000 asl 10)
   r3=:,.{:"1(100000 asl 10)
   r4=:,.{:"1(100000 asl 10)
   r5=:,.{:"1(100000 asl 10)
```

r0

_10	1243
_9	711
_8	329
_7	488
_6	426
_5	363
_4	286
_3	375
_2	346
_1	313
0	234
1	326
2	335
3	363
4	291
5	350
6	410
7	506
8	335
9	709
10	1261

r1;r2;r3;r4;r5

_10	12207	12300	12382	12331	12346
_9	6698	6946	6919	6671	6766
_8	3406	3437	3267	3451	3410
_7	4847	4868	4834	4979	4895
_6	4454	4341	4409	4411	4406
_5	4406	3490	3550	3415	3497
_4	3064	3066	3012	2992	3087
_3	3579	3425	3555	3516	3565
_2	3376	3384	3438	3528	3402
_1	3347	3266	3363	3320	3349
0	2670	2922	2922	2724	2664
1	3318	3338	3314	3352	3304
2	3305	3324	3341	3458	3503
3	3480	3491	3450	3458	3661
4	3034	3096	3059	3026	2961
5	3579	3515	3516	3438	3502
6	4436	4482	4406	4304	4363
7	4845	4874	4986	4804	4794
8	3419	3367	3541	3421	3324
9	6946	6799	6832	7013	6994
10	12415	12269	12225	12388	12207