数値計算のスクエア
非対称行列の固有値を求める

Masato Shimura
JCD02773@nifty.ne.jp

平成 20 年 1 月 24 日

目 次

概 要

ルベリエ · ファディーエバ法（Leverrier Faddeev Method）やフレーム法は特性方程式（多項式）を作成し、それ解いて実対称行列の固有値を求める。多項式を用いるので大きな行列の固有値解法には向かないが、行列の特性をはっきりと把握できるので、線形変換などの学習に適している。

1　Leverrie Faddeev 法

1.1　固有値を求める

対称行列では固有値は異なる実数であり、固有ベクトルは直交することが保証されている。しかし、非対称行列では固有値に重根や複素数が現れることが珍しくなくい。

2007 年夏に固有値問題のメーリングリストに参加したときに、非対称行列の美しい解法としてルベリエ · ファデェーエヴァ法のスクリプトを John Randell（NJ 州 Rutgers Univ. の数学　情報科学の准教授）が紹介していた。特性方程式 (characteristic equation) を用いる方式である。

$AX = \lambda X$

λ : マトリクス　A の固有値
X : 固有値　λ　に対応する固有ベクトル

$(A - \lambda I_n)X = 0$

$f(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$c|A - \lambda I_n| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

更に展開すれば λ の n 次の代数方程式となる。

$$f(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n) = 0$$

1.2　LF 法のアルゴリズム

$det(A - \lambda I_n) = 0$
λ は多項式　$p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ の根である。

Leverrir-Faddeev 法は、多項式　$p(\lambda)$ の係数 c_k を求める優れた方法である。

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-t}\lambda^2 + c_{n-1}\lambda + c_n$$

マトリクスのトレース（対角行列の合計）をTr[A]とする

$$Tr[A] = a_{1,1} + a_{1,t} + \cdots + a_{n,n}$$

補助マトリクス $(Bk)_{k=1}^n$ を作成する。

$$\begin{array}{lcl}
B_1 = A & \rightarrow & p_1 = Tr[B_1] \\
B_2 = A(B_1 - p_1 & \rightarrow & p_2 = \frac{1}{2}Tr[B_1] \\
\cdots & & \cdots \\
B_k = A(B_{k-1} - p_{k-1} & \rightarrow & p_k = \frac{1}{k}Tr[B_k] \\
B_n = A(B_{n-1} - p_{n-1} & \rightarrow & p_n = \frac{1}{n}Tr[B_n]
\end{array}$$

次の多項式を得る。これをニュートン法などで解けば固有値がめられる。

$$p(\lambda) = \lambda^n - p1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-t}\lambda^2 - p_{n-1}\lambda - p_n$$

次の様に A の逆行列も求められる。

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n}(B_{n-1} - p_{n-1}I)$$

1.2.1　数値例

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

特性多項式　特性多項式から, 固有値を求める

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = Tr[B_1] = 6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 6 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}Tr[B_2] = \frac{1}{2} \times -22 = -11$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix} - (-11) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$p_3 = \frac{1}{3} Tr[B_3] = \frac{1}{3} \times 18 = 6$

$P[\lambda] = \lambda^3 - \sum_{i=1}^{3} p_i \lambda^{n-1}$

$p[\lambda] = -6 + 11\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^3$

逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{p_3}(B_{3-1} - p_{3-1} I)$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \times \left[\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

John Randoll に啓発されて LF 法のスクリプトを作ってみた。

```
tr=: (<0 1)&|: NB. diag
NB. umatrix=: (=/~)@i.@#
char_lf=: 3 : 0
ANS=. TR_SUM=. +/ tr MAT=. y NB. sum of trace
UMAT=. =/~ i. # y
for_LF. i.<: # y do.
MAT=. y +/ . * MAT - UMAT *  TR_SUM
TR_SUM=. (% 2+LF)* +/  tr MAT
ANS=. ANS,TR_SUM
end.
(p. POL), (<POL=.(-ANS),1)
)
```

ループは $n-1$ 回。LF がカウンターになっている。ここで $\frac{1}{2}$ からの p_k を 2+LF とする。係数は p. 用に次数の高い方を右にする。最高次の λ の係数 p^n は 1 である。

```
   char_lf a0
+-+-----+----------+
|1|3 2 1|_6 11 _6 1|
+-+-----+----------+
```

解は $p.$ で求めた固有値を先にした。[1]

[1]最初のマスの 1 は p. が多項式を解いたときのループを表している。精度を見るとき以外は

逆行列　LF 法により逆行列を求める。

$A^{-1} = \dfrac{1}{p_3}(B_2 - p_2 I)$

必要なのは p_3, p_2, B_2 であり、char_lf を求める過程で計算できているので、再利用する。

```
char_invmat=: 3 : 0
NB. find %.
ANS=.TR_SUM=. +/ tr MAT=. y NB. sum of trace
UMAT=. =/~ i. # y
for_LF. i.<: # y do.
MAT=. y +/ . * TMP=. MAT - UMAT *  TR_SUM
TR_SUM=. (% 2+LF)* +/  tr MAT
ANS=. ANS,TR_SUM
end.
(% {: ANS)*TMP
)
```

TMP で MAT の途中経過の B_2 を得る。p_3, p_2 は ANS に含まれている。

```
   char_invmat a0
 0.833333 0.166667 _0.5
      0.5      0.5 _0.5
_0.166667 0.166667  0.5

   %. a0
 0.833333 0.166667 _0.5
      0.5      0.5 _0.5
_0.166667 0.166667  0.5
```

例題　　出典　町田他　P33

1.2.2　固有ベクトルを求める

Randoll のスクリプトは固有値の部分のみであった。随伴行列から固有ベクトルを求める方法が町田 · 駒崎 · 松浦「マトリクスの固有値と対角化」東海大学出版会　1990 に紹介されている。

$$B = |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

特に必要としない

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
   a0=. 3 3 $ 2 _2 3 1 1 1 1 3 _1
   a0
2 _2  3
1  1  1
1  3 _1

   char a0
6 _5 _2 1
```

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$f(\lambda) = 6 - 5\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3$

```
   lf a0
3 _2 1
```

固有値　3 -2 1

$B_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$	$B_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + 7$	$B_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 5$
$B_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2$	$B_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 5$	$B_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1$
$B_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda + 2$	$B_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 8$	$B_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4$

$$adj(B) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4 & -2\lambda + 7 & 3\lambda - 5 \\ \lambda + 2 & \lambda^2 - \lambda - 5 & \lambda + 1 \\ \lambda + 2 & 3\lambda - 8 & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

この複雑な計算が *char_lf* を少しバックさせると出来ていた。ここから λ に固有値を入れると固有ベクトルが得られる。原型を見るために特に規格化していないが、各固有値に対応するベクトルを任意に一本ずつ取ればよい。

```
char_lf_evec_sub=: 3 : 0
```

```
TR_SUM=. +/ tr MAT=. y NB. sum of trace
ANS=. <UMAT=. =/~ i. # y
for_LF. i.<: # y do.
MAT=. y +/ . * TMP=. MAT - UMAT *  TR_SUM
TR_SUM=. (% 2+LF)* +/  tr MAT
ANS=. ANS,<TMP
end.
)
```

ここでの行列は $B_k = A(B_{k-1} - \quad p_{k-1}I)$ の $(B_{k-1} - p_{k-1}I)$ の部分を用いればよい。

```
   char_lf_evec_sub a0
+-----+-------+--------+
|1 0 0|0 _2  3|_4  7 _5|
|0 1 0|1 _1  1| 2 _5  1|
|0 0 1|1  3 _3| 2 _8  4|
+-----+-------+--------+
```

```
char_lf_evec=: 3 : 0
EIGEN=: {@> ; 1{ char_lf y
EIGEN2=: {@> L:0 EIGEN ^/ L:0 |. i. # EIGEN
ADJMAT=: char_lf_evec_sub y
ANS=. <''
for_LF. i. # y do.
TMP=. +/> ( > LF{ EIGEN2) * L:0 ADJMAT
ANS=. ANS,<TMP
 end.
EIGEN,:}. ANS
)
```

固有ベクトルを求める（規格化されていない）

```
   char_lf_evec a0
+-----+---------+--------+
|3    |_2       |1       |
+-----+---------+--------+
|5 1 4|0  11 _11|_3  5 _2|
|5 1 4|0   1  _1| 3 _5  2|
|5 1 4|0 _14  14| 3 _5  2|
+-----+---------+--------+
```

1.3　対角化

各固有値に対応する固有ベクトルを 1 本ずつとる。固有ベクトルは大きさは無視してよい。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
  p=. 1 1 1 ,. 11 1 _14 ,. _1 1 1
   p
1  11 _1
1   1  1
1 _14  1

   (%. p) +/ . * a0 +/ . * p

3 1.77636e_15 0
0          _2 0
0 1.77636e_15 1
```

2　Frame 法

Luvierre·Faddeev 法とよく似た方法に FRAME 法がある。計算過程では微妙に+-の符号が異なるが、特性方程式を作り上げる段階で符号を合わせてしまうので、解は同一になる。

1. $b_1 = trA = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
2. $H_1 = A + b_1 I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & & 0 & \\ & b_1 & & \\ & & \cdots & \\ & 0 & & b_1 \end{bmatrix}$
3. $b_2 = -\dfrac{1}{2} tr(AH_1)$
4. (k-1)steps
   $H_{k-1} = AK_{k-2} + b_{k-1} I$
   $b_k = -\dfrac{1}{k} tr(AH_{k-1})$
5. 特性方程式　$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ を解く

```
NB. -----Frame Method-----------------
char_frame=: 3 : ' p. frame_sub y'
frame_sub=: 3 : 0
NB. frame method
NB. Usage: u a0
ANS=. TR_SUM=.- +/ tr MAT=. y NB. trace
UMAT=. =/~ i. #  y NB. unit matrix
for_FR. i. <: # y do.
MAT=. y +/ . * MAT + UMAT * TR_SUM
TR_SUM=. -(% 2+FR)* +/ tr MAT
ANS=. ANS,TR_SUM
end.
|. 1,ANS
)
```

```
   char_frame a0
+-+-----+
|1|3 2 1|
+-+-----+

   frame_sub a0
_6 11 _6 1
```

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

固有値は　3　2　1

[2]

3 LAPACK

```
load '~addons/math/lapack/lapack.ijs'
load '~addons/math/lapack/dgeev.ijs'
```

```
   dgeev_jlapack_ a0
+----------------------------+------+---------------------------+
| 0.486664 _0.771517        0|1 3 _2| 0.57735 _0.57735  _0.616849|
|_0.811107 _0.154303 _0.707107|      |_0.57735 _0.57735 _0.0560772|
| 0.324443 _0.617213  0.707107|      |_0.57735 _0.57735   0.785081|
+----------------------------+------+---------------------------+
```

[2]最初の 1 は多項式 p. の解の解き具合を p. が表示する

```
   (%.>{: a1) +/ . * a0 +/ . * >{: a1
          1 8.88178e_16 _8.88178e_16
1.66533e_16           3  1.11022e_15
6.66134e_16 4.44089e_16           _2
```

4 スペクトル分解

行列を射影の一次結合で表すことをスペクトル分解という。

固有値が重根の場合には, 部分分数展開が必要。

行列 A がスペクトル分解可能のとき、その射影行列は $P_1, \cdots .P_r$ は次により求められる。

$$P_k = \frac{(A-\lambda_1 I)\cdots \underbrace{\quad k \quad} \cdots (A-\lambda_r I)}{(\lambda_k-\lambda_{1)}\cdots \underbrace{\quad k \quad} \cdots (\lambda_k-\lambda_r)}$$

$$P_1 = \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$P_2 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

$$P_3 = \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

スペクトル分解で固有ベクトルを求める。

```
  <"2 (lf a0) sp a0
+------------+---------------+-------------+
|1r2 1r10 2r5|0  11r15 _11r15| 1r2 _5r6  1r3|
|1r2 1r10 2r5|0   1r15  _1r15|_1r2  5r6 _1r3|
|1r2 1r10 2r5|0 _14r15  14r15|_1r2  5r6 _1r3|
+------------+---------------+-------------+

   a2
 1 1 _1
 1 1 _1
_1 1  1

   lf a2
2 1 0
```

```
b=.  <"2 (lf a2) sp a2
+------+-----+------+
|1 0 _1|_1 1 1|1 _1 0|
|1 0 _1|_1 1 1|0  0 0|
|0 0  0|_1 1 1|1 _1 0|
+------+-----+------+
 P3      P2     P1
```

$A = 0 \cdot P_1 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot_3$
$A^m = p_2 + 2^m P_3$

```
  +/> ({@>0 1 8) * L:0 b
 7 _7 1
_1  1 1
 7 _7 1

a2 +/ . *  a2 +/ . * a2
 7 1 _7
 7 1 _7
_1 1  1

 lf +/> ({@>0 1 8) * L:0 b
8 1 0


lf a2 +/ . *  a2 +/ . * a2
8 1 0
```

5 マトリクスの重要な定理と公式

5.1 ゲルシュゴリンの定理

正法行列 $A = [a_{ij}]$ の固有値は、複素平面上で $a_{aa}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を中心とする半径 $r_1, r_2 \cdots, y_n$ の閉円板 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ のどれかに含まれる。

実数では中心は x 軸上の点となる。複素数では y 軸上の i が中心となる。

対角行列（位置）を取り除いた行の絶対値を行方向に足し合わせたものが半径である。円盤が重なった場合は合併集合内（外縁）にある。

ゲルシュゴリンをタートルグラフィックスで描いてみた。

```
gg=: 3 : 0
NB. Gershgollin theorem
NB. usage: gg y(matrix)
('Center';'r'),.{|:((<0 1)&|: y),.+/"1| (0) (2 # L:0 {@> i. # y)}  y
```

```
   a0
 1 _1 0
 1  5 1
_2 _1 9

   gg a0
+------+-----+
|Center|1 5 9|
+------+-----+
|r     |1 2 3|
+------+-----+

   lf a0
8.81114 4.85693 1.33193
```

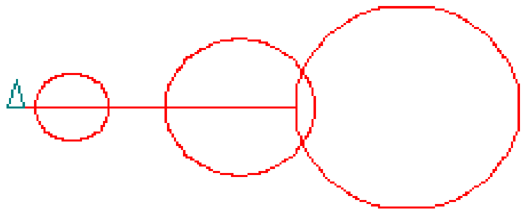

図 1: gerschgorin circles

```
)
```

5.2 ケーリ · ハミルトンの定理

ハミルトン (1805-1865) アイルランドの神童。ケーリー (Arthur Cayley 1821-1895) はケンブリジで数学を学び、法律家として過ごした後、42 才でケンブリッジの数学教授になった。線形数学の創始者の一人である。
定理　$\phi(\lambda)$ の　λに A を代入すると$\phi(A) = O_n$となる。

$\phi(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + a_{n-a}\lambda^n \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$
$\phi(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + (-1)^n A^n = O_n$

```
   a
2 1 _1
1 1  0
0 1  1

   char a
0 4 _4 1
```

$|A - \lambda| = 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3$
$A^3 - 4A^2 + 4A = 0_3$

```
(a +/ . * a +/ . * a )+(-4 * a +/ . * a)+ 4*a
0 0 0
0 0 0
0 0 0
```

5.2.1 ケーリー・ハミルトンの応用

逆行列を求める　この定理の応用範囲は深い。

$-I - 5A - 3A^2 + A^3 = 0_3$	`a1=. 3 3 $ 1 1 1 2 0 1 4 1 2`
	
	`1 1 1`
	`2 0 1`
	`4 1 2`
	
	`   char a1`
	`_1 _5 _3 1`

$\dfrac{-I - 5A - 3A^2 + A^3}{A^{-1}}$
$= A^{-1} - 5I - 3A + A^2$
$A^{-1} = 5I + 3A - A^2$
	`(a1 +/ . * a1)-(3*a1)+5* =/~i.3`
	
	`_1 _1  1`
	` 0 _2  1`
	` 2  3 _2`
	
	`   %. a1`
	
	`_1 _1  1`
	` 0 _2  1`
	` 2  3 _2`

6　複素数の固有値

非対称行列では固有値は実数とは限らない。

特性方程式は多項式であるので、複素数（2 元数である）も姿を現す。

Chatelin は *C.Moler* からの引用として次のような行列の摂動の例を挙げる。*C*0 の中央の 180 を僅かに動かすと特性方程式と固有値が摂動する。

a_{22} の周りの小さな摂動が結果として固有値の上に大きな変化を引き起こす場合がある。

C0
`_149 _50 _154`
`537 180 546`
`_27 _9 _25`
	$-6 + 11\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
	Eigenvalue: 3 2 1

C1
`_149 _50 _154`
`537 180.01 546`
`_27 _9 _25`
	$-1.67 + 9.26\lambda - 6.01\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
	Eigenvalue:
	3.5019
	2.30083
	0.207266

C2
`_149 _50 _154`
`537 179.998 546`
`_27 _9 _25`
	$-6.96602 + 11.3882\lambda - 5.99777\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
	Eigenvalue:
	2.89588
	1.55095±j0.00799921

J は共役複素数をサポートしている。単項の + は conjugate

LAPACK では複素数は *xgeev.ijs* である。J の LAB 参照。
[3]

[3]J では実数、複素数も同じように使える。今、ユニタリの間にいますよと言われなければ気が付かない。

```
   j. i.5
0 0j1 0j2 0j3 0j4

  + j. i.5
0 0j_1 0j_2 0j_3 0j_4

   (+ j. i.5) + j. i.5
0 0 0 0 0

   (+ j. i.5) * j. i.5
0 1 4 9 16
```

複素数による対角化

```
 |:  char_evec C2
+-------------------+-----------------------------------------------------+
|2.89588            |_26.4127 _8.79389 _26.3088                           |
|                   | 238.086  79.2689  237.149                           |
|                   |_51.2489 _17.0629 _51.0472                           |
+-------------------+-----------------------------------------------------+
|1.55095j0.00799921 |  176.068j_1.21505    58.4527j_0.39996   180.811j_1.23188|
|                   |  _484.142j4.29557     _160.73j1.41667   _497.184j4.36757|
|                   |_14.9358j_0.215979 _4.95851j_0.0719929 _15.3381j_0.223145|
+-------------------+-----------------------------------------------------+
|1.55095j_0.00799921|  176.068j1.21505    58.4527j0.39996   180.811j1.23188   |
|                   |_484.142j_4.29557   _160.73j_1.41667 _497.184j_4.36757   |
|                   |_14.9358j0.215979 _4.95851j0.0719929 _15.3381j0.223145   |
+-------------------+-----------------------------------------------------+
```

```
   a12
_26.4127    58.4527j_0.39996   180.811j1.23188
 238.086     _160.73j1.41667 _497.184j_4.36757
_51.2489 _4.95851j_0.0719929 _15.3381j0.223145

   (%. a12) +/ . * C2 +/ . * a12

     2.89588j1.6641e_9 1.03029e_11j_9.14359e_10 4.90967e_11j_2.82847e_9
_4.27661e_7j1.02955e_8       1.55095j0.00799921    7.2669e_7j1.69625e_8
1.38205e_7j_4.96857e_9 _7.59571e_8j_3.98018e_10     1.55095j_0.00799921
```

7 SVD 変換（特異値分解）

singular value decomposition

J の package/math に *svd.ijs* が入っている。[4]

ネットで拾った幾つかの声

- 学校では Jordan を教えるが、実務では圧倒的に SVD 法を用いる。
- SVD 法は面長や幅の広い非正方行列に適用できる。
- 金谷の本が唯一わかりやすい。買っておいて良かった。

早速「金谷」を取り出してみた。画像処理の著書を多く書いている関係か SVD は画像処理の項に入っていた。[5]

$$P = U \sum V^T$$

$$P = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix} V^r, \ \ \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \ \ i = 1, \cdots, r$$

[4] LAPACK にも入っている

[5] $m^2 \times m^2, m = 512$ で 512^4 のサイズでも SVD 分解だと計算が実用の範囲に入るとのことである。

<table>
<tr><td>P

a1
3 1 2
3 2 1</td><td>$M = PP^T$

a1 +/ . * |: a1
14 13
13 14</td><td>$N = P^T P$

(|: a1) +/ . * a1
18 9 9
9 5 4
9 4 5</td></tr>
<tr><td>MとNの0でない固有値は一致する。</td><td>char_lf a1 +/ . * |: a1
+-+----+--------+
|1|27 1|27 _28 1|
+-+----+--------+</td><td>char_lf (|: a1)+/ . * a1
+-+------+----------+
|1|27 1 0|0 27 _28 1|
+-+------+----------+</td></tr>
<tr><td>%: 27 1
5.19615 1</td><td>pick_evec a1 +/ . * |: a1
0.707107 0.707107
0.707107 _0.707107</td><td>pick_evec (|:a1) +/ . * a1
0.816497 0 _0.57735
0.408248 _0.707107 0.57735
0.408248 0.707107 0.57735</td></tr>
</table>

```
svd a1
+------------------+---------+--------------------+
|0.707107 _0.707107|5.19615 1|0.816497 4.44089e_16|
|0.707107  0.707107|         |0.408248    0.707107|
|                  |         |0.408248   _0.707107|
+------------------+---------+--------------------+
```

U	P の出力の基底となる正規直交ベクトル
$\sum$	$\sum$ は特異値を対角成分に持つ。特異値は増幅率を表し、入力成分がそれぞれ何倍されて出力されるかを表す
V^T	P の入力の基底となる正規直交ベクトル

8 Reference

F.C.Chatlein 伊理正夫･由美　訳「行列の固有値」(新装版)Springer　1993/2003

笠原　皓司「行列の構造」日本評論社　1994

金谷健一　「これなら分かる応用数学教室」共立出版　2003

服部雄一　「FORTRAN による数値計算」森北出版　1992

町田 · 駒崎 · 松浦「マトリクスの固有値と対角化」東海大学出版会　1990

http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/FaddeevLeverierMod.html